Echantillonnage d'un signal

I. Chaîne de traitement numérique du signal

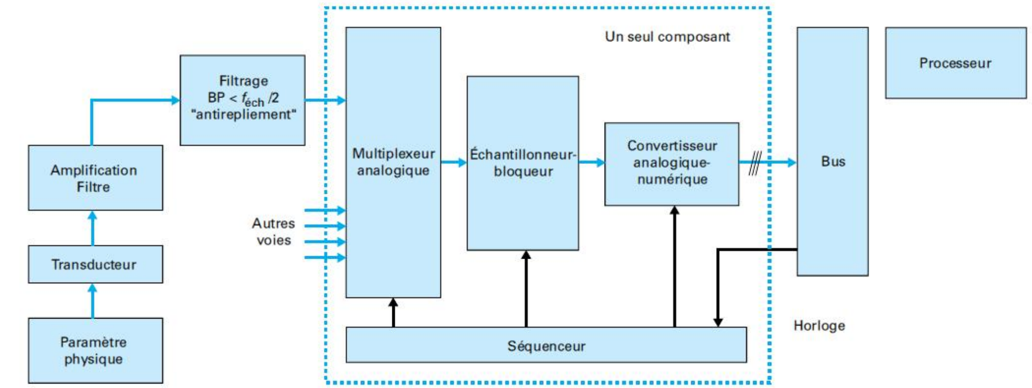


Schéma-bloc d'un système d'acquisition de données analogique-numérique

Un transducteur ou capteur transforme une grandeur physique en un signal électrique qui lui est (pas toujours) proportionnel. Le niveau de ce signal étant souvent très faible (quelques millivolts, voire quelques microvolts), le système qui suit filtre et amplifie ce signal et réalise en outre assez souvent une adaptation simple (passage d'une forte à une basse impédance, transformation courant-tension...) ou complexe (démodulation, premier filtrage...).

Avant et après l'amplificateur, on trouve généralement un ou plusieurs filtres (souvent un filtre passe-bas) dont le but est de séparer le signal utile des autres et des parasites (bruit, autres fréquences, etc.). Il faut aussi ne **pas oublier le filtre de bande** (ou filtre **anti-repliement** ou filtre anti-aliasing) avant l'échantillonnage, qui **limite la bande passante à féch/2.**

Assez souvent, les équipements comprennent plusieurs entrées analogiques de même nature et, afin de diminuer le nombre de CAN, on utilise un ou plusieurs multiplexeurs. Un échantillonneur- bloqueur est souvent nécessaire ensuite pour maintenir le signal à convertir dans le même état pendant tout le temps que dure la conversion. Un séquenceur assure la gestion de l'ensemble de ces opérations et aiguille finalement les signaux numériques de sortie du CAN vers un bus relié au calculateur.

Les composants actuels réalisent toutes ces fonctions (amplificateur d'entrée, multiplexeur, échantillonneur-bloqueur, convertisseur, séquenceur et interface bus) **en un seul boîtier qui peut être très petit et ne consommer que quelques milliwatts.**

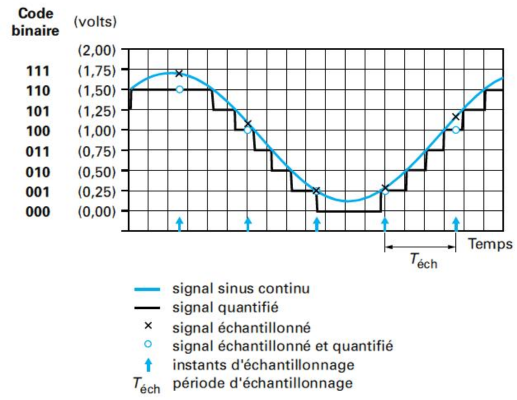
Dans les circuits PSoC, on trouve également un processeur et le bus correspondant ; on peut également y intégrer les fonctions d'amplification, de filtrage analogique, de conversion N/A. Le processeur joue le rôle de chef d'orchestre (séquenceur) et il permet également d'effectuer le traitement numérique sur le signal converti en numérique.

II. Echantillonnage et quantification

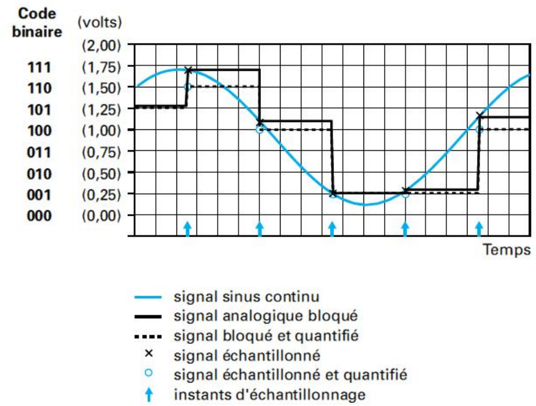
La conversion A/N est constituée de deux opérations distinctes :

- **l'échantillonnage** dans le temps, qui consiste à convertir un signal à temps continu en une suite d'échantillons prélevés à des instants discrets ;
- **la quantification en amplitude**, qui remplace un signal dont l'amplitude peut varier de façon continue en un signal ne pouvant prendre qu'un nombre fini de valeurs distinctes.

Effectuer une conversion analogique-numérique (ou A/N), c'est **rechercher une expression numérique, dans un code déterminé, pour représenter une information analogique. Un convertisseur A/N est un dispositif qui reçoit un signal analogique et le transforme en un signal numérique.**



Quantification, échantillonnage et (échantillonnage + quantification du signal)

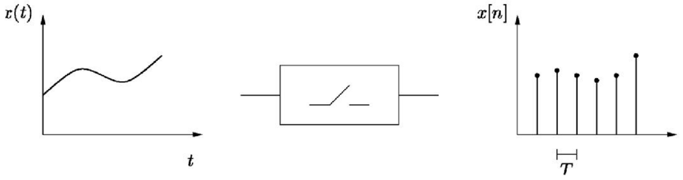


Echantillonnage + blocage, puis quantification du signal

III. Echantillonnage

III.1. Principe ; échantillonnage idéal ; théorème de Nyquist

Ainsi **l'échantillonnage consiste à prendre de façon périodique des valeurs appelées échantillons sur le signal analogique.** Dans les systèmes numériques, une horloge cadence les opérations à faire, on peut utiliser cette horloge pour venir régulièrement prendre un échantillon sur le signal d'entrée.



Une opération équivalente très utile pour l'analyse consiste à multiplier le signal x(t) par un train d'impulsions ou peigne de Dirac :

$$\boxed{p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta_{nT}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)}$$

Le signal $x_p(t) = x(t).p(t)$ est un signal en temps continu qui contient la même information que le signal échantillonné $\{xn\}$.

$$\boxed{x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\delta(t-nT)}$$

On considèrera $x_p(t) = x(t)\ p(t)$ comme le modèle mathématique du signal échantillonné.

Prenons la transformée de Laplace de $x_p(t)$; compte tenu de $T.L[\delta(t-nT)] = e^{-pnT}$, il vient :

$$X_p(p)=L_p^-\left[x_p(t)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)e^{-npT}$$

En posant $z = e^{pT}$, on obtient l'expression de la transformée en z du signal à temps échantillonné $\{x_n\}$

La propriété de multiplication-convolution donne :

$$x_p(t)=x(t)\,p(t)\xleftrightarrow{TF}\tilde{X}(\nu)*\tilde{P}(\nu)$$

La transformée de Fourier du peigne de Dirac p(t) de période T est elle-même un train d'impulsions, de période 1/T :

$$\tilde{P}(\nu)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\nu-\frac{k}{T}\right)$$

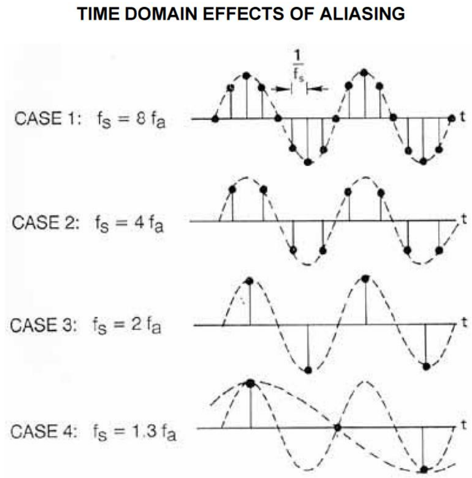
Puisque la convolution avec une impulsion produit un simple décalage, on obtient :

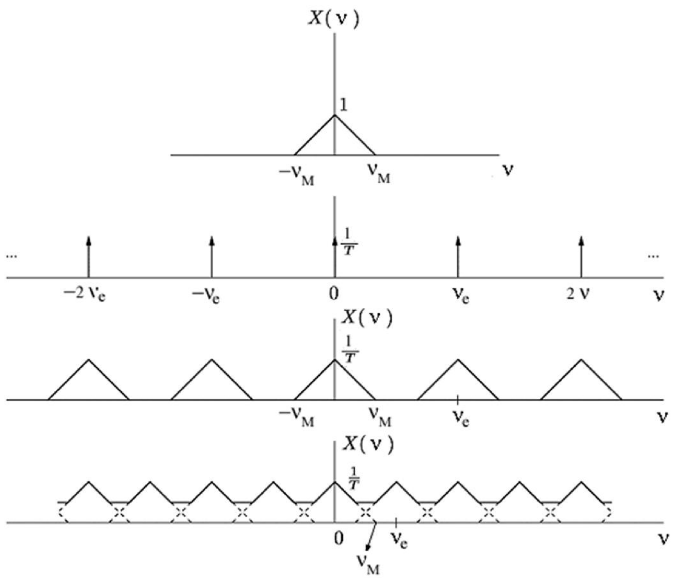
$$\boxed{\tilde{X}_p(\nu)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\tilde{X}\left(\nu-\frac{k}{T}\right)}$$

La transformée de Fourier $X_p(\upsilon)$ du signal échantillonné est donc une fonction périodique de période $1/T$ obtenue par la superposition de copies décalées du spectre $(1/T)\ X(\upsilon)$

On peut dire que l'opération d'échantillonnage périodise le spectre du signal.

L'échantillonnage d'un signal $x(t)$ de largeur de bande υ_m peut conduire à deux situations différentes suivant la valeur de la pulsation d'échantillonnage υ_e.(que l'on notera aussi υ_s pour "sample") par rapport à la pulsation maximum υ_m présente dans le spectre de x (celui-ci est donc supposé borné dans les deux cas envisagés).





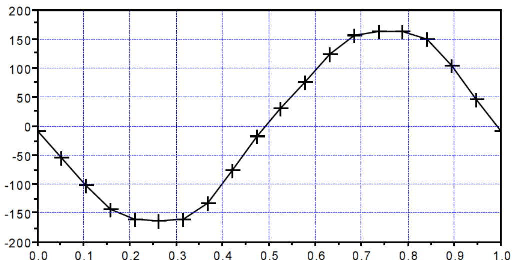
Si $\upsilon_e > 2\ \upsilon_m$ la transformée de Fourier $X_p(\upsilon)$ du signal à temps continu est simplement recopiée aux multiples entiers de la fréquence d'échantillonnage. Il n'y a pas recouvrement des copies du motif. Dans ce cas, il n'y a pas de perte d'information car le contenu fréquentiel du signal x(t) peut être extrait de celui du signal $x_p(t)$: il suffit de filtrer $x_p(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de gain T et de fréquence de coupure υ_c comprise entre υ_m et $\upsilon_e - \upsilon_m$.

Par contre, si $\upsilon_e < 2\ \upsilon_m$, les copies de $X_p(\upsilon)$ se recouvrent partiellement et il y a perte d'information : deux signaux différents en temps continu pourront dans ce cas donner, par échantillonnage, un même signal x_p (t).

III.2. Nyquist et les signaux répétitifs

Dans certains cas, un signal peut être échantillonné beaucoup plus lentement que ce que le théorème de Nyquist indique.

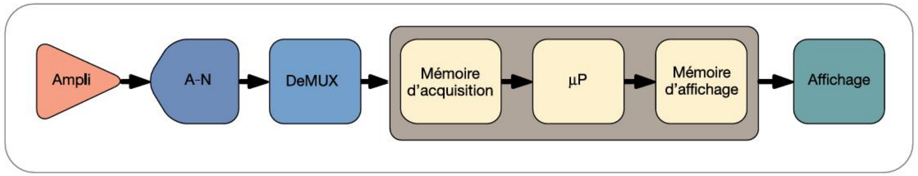
Prenons le problème d'une l'alimentation secteur (USA) dont l'on souhaite étudier le contenu spectral. Pour cela, on réalise une CAN. Supposons que le processeur utilisé ne permette pas d'échantillonner à plus de 20 HZ. Si la fréquence du signal est exactement égale à 60 Hz, et que l'on échantillonne exactement à 20 Hz, on échantillonnera toujours le même point.

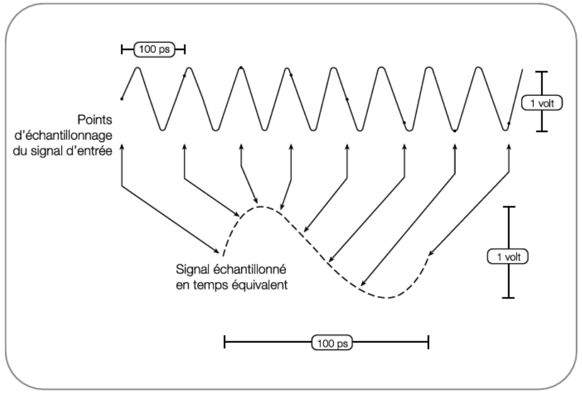


Si on échantillonne légèrement plus lentement, la phase du signal à l'intérieur d'un cycle avancera un petit peu à chaque nouvel échantillon, de sorte que le signal obtenu sera une réplique du signal original, simplement plus lente. La figue ci-contre montre le résultat d'un échantillonnage à 19 Hz La courbe résultante se répète à 1 Hz au lieu de 60, mais reproduit fidèlement la courbe originale.

Comment cela peut-il apparemment violer la condition de Nyquist et quand même donner de bons résultats ? C'est parce que nous sommes en train de mesurer quelque chose de strictement cyclique. Ce principe est utilisé dans les oscilloscopes numériques.

III.3. Echantillonnage dans les oscilloscopes numériques





Echantillonnage en temps équivalent dans un oscilloscope

Commandes d'échantillonnage

Certains oscilloscopes numériques offrent le choix entre deux méthodes d'échantillonnage : échantillonnage en temps réel ou échantillonnage en temps équivalent. Les commandes d'acquisition de ces oscilloscopes permettent de sélectionner la méthode d'échantillonnage à utiliser pour acquérir les signaux. Il est à noter que ce choix ne change rien lorsque la base de temps est réglée sur une vitesse lente et qu'il n'a d'effet que lorsque le CAN ne peut pas échantillonner le signal assez rapidement pour remplir l'enregistrement d'échantillons en un seul passage.

Méthodes d'échantillonnage

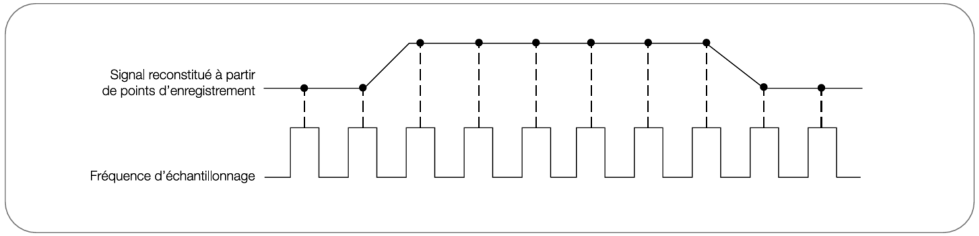
Comme on l'a indiqué précédemment, les oscilloscopes numériques emploient essentiellement deux méthodes d'échantillonnage : l'échantillonnage en temps réel et l'échantillonnage en temps équivalent.

Il existe en outre deux types d'échantillonnage en temps équivalent : aléatoire et séquentiel. Chaque méthode présente des avantages particuliers suivant le type de mesures à effectuer.

Echantillonnage en temps réel

L'échantillonnage en temps réel convient parfaitement aux signaux de plage de fréquences inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage maximum de l'oscilloscope. Dans ce cas, l'oscilloscope peut acquérir en un seul "balayage" un nombre de points largement suffisant pour reconstituer une image précise du signal. L'échantillonnage en temps réel est le seul moyen de saisir des événements transitoires rapides monocoup avec un oscilloscope numérique.

L'échantillonnage en temps réel constitue un défi majeur pour les oscilloscopes numériques, en raison de la fréquence d'échantillonnage élevée requise pour numériser avec précision les événements transitoires haute fréquence. L'échantillonnage en temps réel est compliqué en outre par la nécessité d'avoir une mémoire haute vitesse pour enregistrer le signal numérisé.



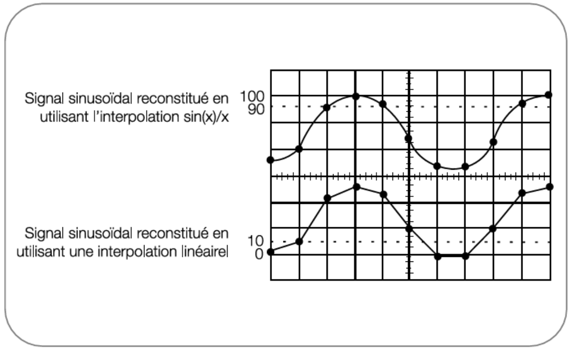
Méthode d'échantillonnage en temps réel : la fréquence d'échantillonnage suffisamment élevée pour définir les fronts avec précision

Echantillonnage en temps réel avec interpolation

La fonction d'interpolation "relie les points" de façon à afficher avec précision un signal qui ne peut être échantillonné que peu de fois par cycle. Lorsqu'il fonctionne en mode d'échantillonnage en temps réel avec interpolation, l'oscilloscope recueille quelques points d'échantillonnage du signal en un seul passage et utilise l'interpolation pour compléter la représentation graphique. Cette technique de traitement permet d'estimer la forme du signal à partir de ces points.

L'interpolation linéaire relie les points d'échantillonnage par des lignes droites. Cette approche est limitée à la reconstitution des signaux à fronts droits tels que les ondes carrées.

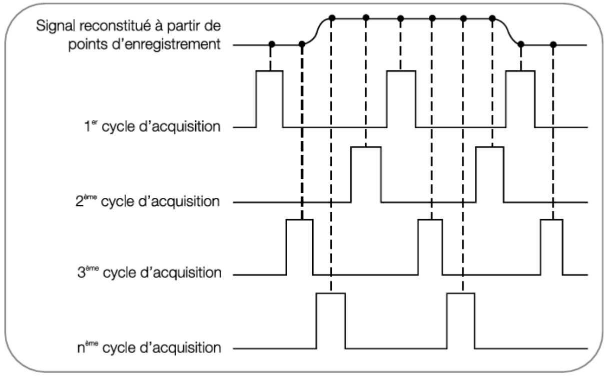
L'interpolation sin(x)/x est une méthode plus souple qui relie les points d'échantillonnage par des courbes. Il s'agit d'un procédé mathématique consistant à calculer les points nécessaires pour compléter la représentation du signal dans les intervalles de temps séparant les échantillons réels. Cette forme d'interpolation convient bien pour les formes d'onde incurvées ou irrégulières, qui sont beaucoup plus courantes dans la pratique que les ondes carrées et les impulsions. L'interpolation sin(x)/x est donc la méthode de choix pour les applications dans lesquelles la fréquence d'échantillonnage est 3 à 5 fois plus élevée que la bande passante du système.



Interpolations linéaire et sin(x)/x.

Echantillonnage en temps équivalent

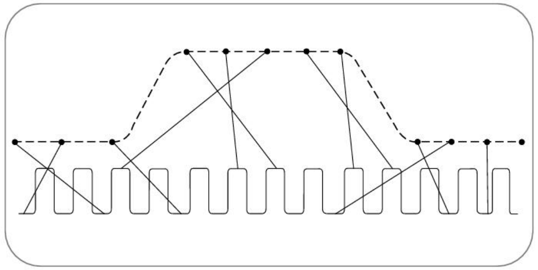
L'échantillonnage en temps équivalent sert à acquérir avec précision les signaux dont la fréquence dépasse la moitié de la fréquence d'échantillonnage de l'oscilloscope. Les numériseurs (échantillonneurs) en temps équivalent profitent du fait que la plupart des événements naturels et artificiels sont répétitifs.



Echantillonnage en temps équivalent d'un signal répétitif très rapide

L'échantillonnage en temps équivalent reconstitue l'image d'un signal répétitif en saisissant une petite quantité de données à chaque répétition. Le signal se reconstitue lentement comme une guirlande dont les lampes s'allument une par une. Ceci permet à l'oscilloscope de saisir avec précision les signaux présentant des composantes fréquentielles beaucoup plus élevées que la fréquence d'échantillonnage de l'oscilloscope.

Il existe deux types d'échantillonnage en temps équivalent – aléatoire et séquentiel – qui présentent tous deux des avantages particuliers. L'échantillonnage en temps équivalent aléatoire permet d'afficher le signal d'entrée avant le point de déclenchement sans utiliser une ligne à retard. L'échantillonnage en temps équivalent séquentiel offre une résolution temporelle et une précision beaucoup plus élevées. Ces deux méthodes d'échantillonnage nécessitent un signal d'entrée répétitif.



▶ ***Figure 33.*** *Dans l'échantillonnage en temps équivalent aléatoire, l'horloge d'échantillonnage est asynchrone par rapport au signal d'entrée et au déclenchement.*

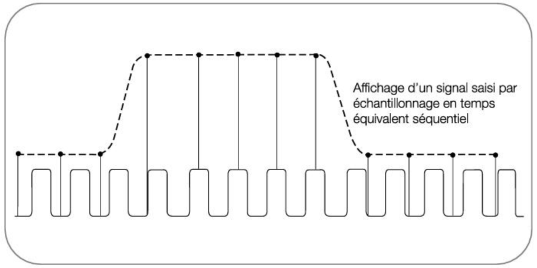


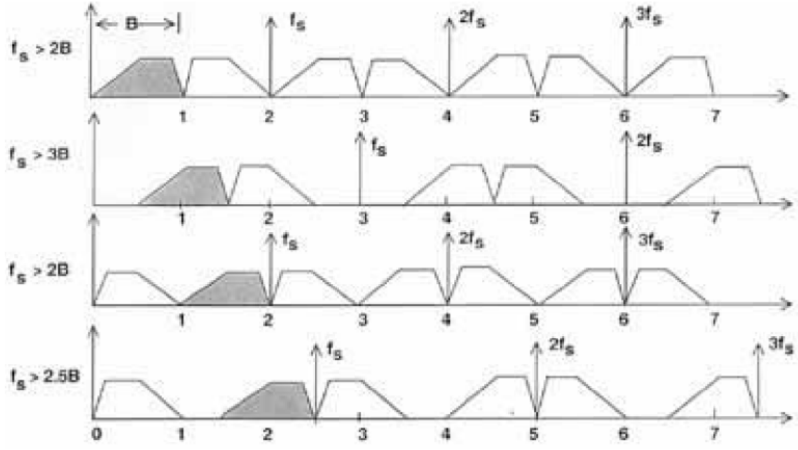
Figure 34. *Dans l'échantillonnage en temps équivalent séquentiel, le système saisit un seul échantillon pour chaque événement de déclenchement reconnu après un retard incrémenté à l'issue de chaque cycle.*

Specifications	WaveJet 314	WaveJet 312	WaveJet 324	WaveJet 322
Bandwidth	100 MHz		200 MHz	
Rise Time	3.5 ns		1.75 ns	
Input Channels	4	2	4	2
Display	7.5" Color flat-panel TFT-LCD, 640 x 480 VGA			
Sampling Rate (single-shot)	1 GS/s			2 GS/s
Sampling Rate (RIS)	100 GS/s			
Peak Detect Period	1 ns			
Memory Length	500 kpts/Ch (all channels)			
Capture Time	500 µs at 1 GS/s, 250 µs at 2 GS/s			
Vertical Resolution	8 bit			
Vertical Sensitivity	2 mV/div–10 V/div			
Vertical (DC) Gain Accuracy	± (1.5% + 0.5% of full scale)			

Une bande passante analogique de 100 MHz garantit simplement que le signal de 100 MHz parviendra aux circuits de numérisation de l'oscilloscope, sa seule limitation étant l'amplificateur vertical analogique ; ce qui ne dit rien de l'effet que peut avoir la conversion analogique/numérique ultérieure.

télécom saint-étienne école d'ingénieurs nouvelles technologies FI2 Acquisition et transformation du signal

III.4. Echantillonnage de signaux à bande étroite ; sous échantillonnage (Band-pass sampling, super-Nyquist sampling)



Taux d'échantillonnage minimum pour échantillonner un signal de BP 1 MHz

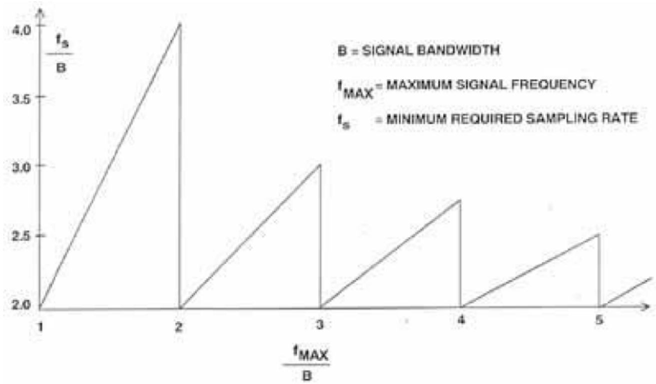
Dans le 1er cas, le signal occupe une bande passante qui s'étend du continu jusque à 1MHz et donc, le taux d'échantillonnage doit être supérieur à 2MSPS.

Dans le 2nd cas, le signal a toujours une bande passante de 1MHz, mais s'attendent de 0,5 à 1,5 MHZ ; le signal doit être échantillonné à 3MSPs pour éviter le recouvrement.

Dans le 3ème cas, pour lequel la bande passante est toujours égale à 1 MHZ, mais de 1 à 2 MHz, le taux d'échantillonnage minimum n'est que de 2 MHZ.

Le dernier cas correspond à un signal occupant une bande de fréquence de 1.5à 2.5 MHZ et pouvant être échantillonné à une fréquence minimum de 2,5 MHz.

Cette analyse peut être généralisée comme indiqué à la figure ci-dessous

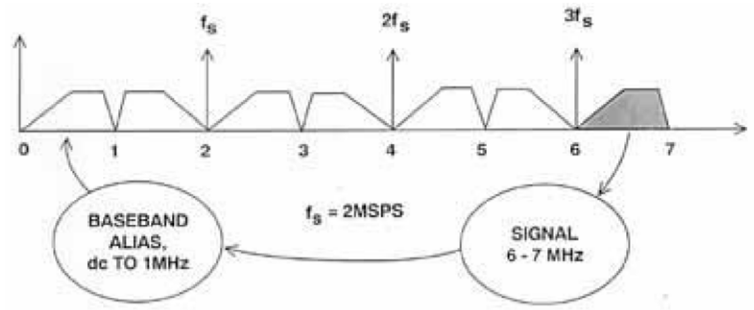


Taux d'échantillonnage minimum fonction du rapport entre la fréquence maximum du spectre et la BP

La valeur minimum effective du taux de conversion est donc une fonction du rapport entre la fréquence maximum du spectre f_{max} et la bande passante totale B. Notons que pour les grandes valeurs de f_{max}/B , le taux de conversion minimum tend vers 2B.

Considérons maintenant le cas d'un signal à bande étroite occupant une bande passante de 1 MHz entre 6 et 7 MHz. D'après ce qui a été vu précédemment (et non d'après Nyquist), il doit être échantillonné au moins à une fréquence de 2 MHz.

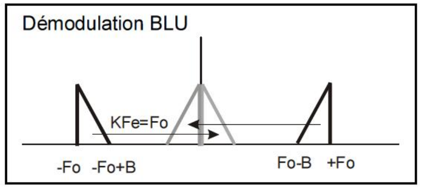
En supposant que l'ADC utilisé convertisse à 2 MSPS, des fréquences apparaîtront dans le spectre à tous les multiples entiers de fs : 4 MHz, 6 MHZ, 8MHz,… Le signal original entre 6 et 7 MHz est aliasé autour de chaque fréquence harmonique f_s, 2 f_s, 3 f_s, 4 f_s, … d'où le terme « harmonic sampling ».



N'importe lequel de ces composants aliasé est une représentation précise du signal original (l'inversion de fréquence qui se produit pour une moitié des composantes aliasées peut être supprimée par logiciel), en particulier, la composante située entre le continu et 1 MHz.

Pour toute une catégorie de signaux, l'information n'est contenue que dans la modulation du signal et aucune information n'est contenue dans la porteuse. La fréquence de cette porteuse peut être très élevée, sans commune mesure avec celle du signal utile (par exemple le téléphone portable utilise des bandes de fréquences autour de 1800 MHz, pour un signal utile de quelques kHz).

Si un signal à bande étroite est appliqué à un système qui lui fait subir un filtrage passe-bande adapté il est possible de l'échantillonner à une cadence très inférieure à celle suggérée par le théorème de Shannon .C'est le cas par exemple d'une porteuse modulée en amplitude. Il est possible de démoduler le signal modulé en amplitude en le sous-échantillonnant à une fréquence judicieusement choisie.



III.5. Suréchantillonnage

On parle de suréchantillonnage dès que la fréquence d'échantillonnage est plus que 2 fois au-dessus de la fréquence maximum du signal (qui est donc supposé à spectre borné). On adopte en pratique des rapports allant de 2.5 à 10 entre la fréquence de Nyquist et la fréquence maximum du signal.

Convertisseurs Delta-Sigma (parfois appelé à suréchantillonage)

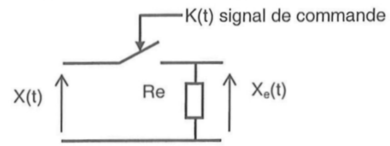
Il est possible d'améliorer la résolution globale d'un convertisseur A/N en suréchantillonnant d'un facteur N_{OSR} (OSR : **O**ver**S**ampling **R**atio) le signal analogique d'entrée x(t), c'est-à-dire

en l'échantillonnant à une fréquence très supérieure à la fréquence minimum requise pour éviter les repliements de spectre.

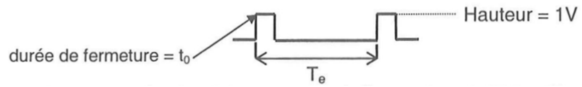
IV. Méthodes d'échantillonnage

IV.1. Echantillonnage naturel

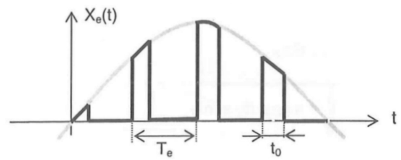
Dans le schéma ci-dessous, le signal de commande permet de prélever les échantillons, il est périodique de période T_e. Quand l'interrupteur est fermé on a $X_e(t) = X(t)$ et lorsqu'il est ouvert $X_e(t) = 0$.



La durée de fermeture de l'interrupteur est courte, mais ne peut pas être infiniment petite.



Le signal X_e a alors la forme suivante :



Inconvénient

La grandeur analogique n'est pas constante durant la conversion, ce qui provoque des erreurs

On utilise en pratique un échantillonnage avec maintien, à l'aide échantillonneur-bloqueur.

IV.2. Echantillonneur / bloqueur

La tension d'entrée d'un convertisseur doit être la plus constante possible pendant la durée de la conversion. Les fluctuations résiduelles de cette tension doivent être du même ordre de grandeur que la précision des CAN (meilleure que 1%).

Prenons l'exemple d'un signal sinusoïdal de fréquence f = 2 kHz ($V=V_{max} \sin 2\pi ft$), la vitesse de variation de la tension est maximale à t = 0 :

$$(\Delta V/\Delta t)_{max} = V_{max}\, 2\pi f$$

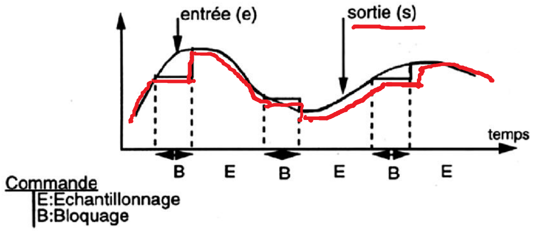
donc le temps de maintien pour avoir ΔV / Vmax < 1% est $\Delta t = 1$ µs.

Ce calcul très simple montre qu'il est nécessaire d'utiliser un CAN très rapide (temps de conversion < 1µs) pour pouvoir considérer que la tension à convertir reste constante lors de la conversion d'un signal, même de fréquence relativement basse (2 KHz).

Aussi utilise-t-on un composant spécifique permettant de s'affranchir de ce problème : un échantillonneur-bloqueur. **Le rôle de l'échantillonneur-bloqueur dans un système d'acquisition de données est donc de maintenir la tension à convertir constante pendant le temps de conversion.** Ceci est indispensable pour des signaux à variations rapides par rapport au temps de conversion, si l'on veut obtenir une conversion significative. Il fonctionne suivant deux états (cf. figure ci après) :

- échantillonnage (*Sample*) ou plus exactement Suiveur, pendant lequel il suit les variations instantanées du signal d'entrée ;
- blocage (*Hold*) pendant lequel il conserve en mémoire la dernière valeur du signal analogique existant avant le passage en mode blocage.

Souvent, les durées d'échantillonnage sont très réduites vis à vis des durées de blocage.



Représentation schématique de la tension de sortie d'un échantillonneur-bloqueur en fonction de la commande

Le circuit présente généralement un gain unitaire et n'est pas inverseur. La logique de commande de fonctionnement est souvent compatible niveaux TTL. Le schéma de principe d'un tel circuit (cf. figure) se compose d'un interrupteur électronique (transistor MOS) qui permet d'isoler l'entrée e de la sortie s lors du fonctionnement en bloqueur. Ensuite une capacité C permet de mémoriser la dernière tension présente à ses bornes ; sa valeur ne doit pas être trop grande pour réaliser correctement la fonction échantillonneur ou suiveur (constante de temps RC faible), mais suffisamment élevée pour maintenir la tension à ses bornes constantes pendant la conversion.

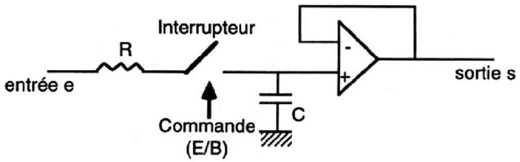
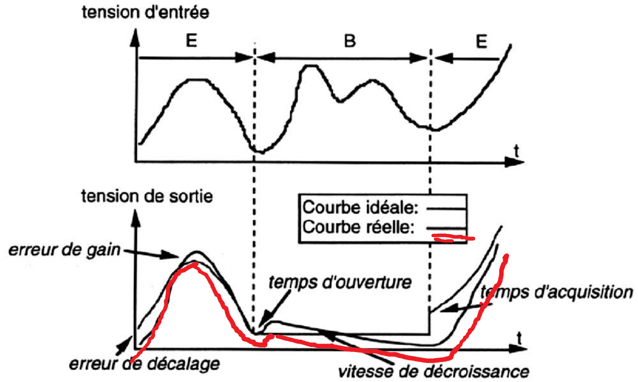


Schéma de principe d'un échantillonneur-bloqueur

IV.3. Caractéristiques d'un échantillonneur/bloqueur

Les caractéristiques d'un tel composant sont donc fonction des constituants internes. L'amplificateur opérationnel conduit à des erreurs de gain et de décalage de zéro (tension d'offset) qui sont supprimées par des réglages externes. L'impédance d'entrée est souvent très grande, supérieure à 100 MΩ, permettant ainsi de prélever la tension à convertir sans perturber le signal. Enfin, les caractéristiques les plus importantes sont les caractéristiques dynamiques (cf. figure) :

- vitesse de décroissance (*Droop rate*) : pendant la phase «Bloqueur», le condensateur de mémorisation se décharge très lentement (qq 10 µV/ms) ;
- temps d'acquisition : c'est le temps nécessaire pour avoir égalité entre les tensions d'entrée et de sortie de l'échantillonneur/bloqueur ; ce temps va caractériser la fréquence maximale de fonctionnement du composant (qq 10KHz à qq MHz).



Erreurs d'un échantillonneur/bloqueur réel

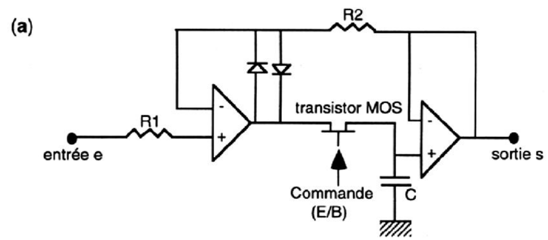
- temps d'ouverture (*Aperture delay*): ce temps exprime le retard effectif entre la fin de la phase d'acquisition et de début de maintien. C'est en fait le temps de commutation des interrupteurs commandés (qq 10 ns) ;
- transparence : l'interrupteur n'étant jamais parfait, un couplage s'établit entre l'entrée et la sortie. Il apparaît alors, sur celle-ci, une composante résiduelle qui reproduit les variations de l'entrée.

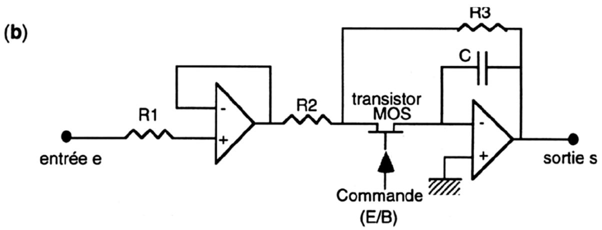
La recherche des deux qualités contradictoires, précision et vitesse, que doit posséder un échantillonneur/bloqueur, préside à la conception de sa structure interne.

IV.4. Structure interne d'un échantillonneur/bloqueur

Le schéma complet d'un échantillonneur/bloqueur est réalisé à partir de deux amplificateurs opérationnels. Le premier amplificateur, mis en entrée, permet ainsi de disposer d'une grande impédance d'entrée. Le condensateur C, composant externe au circuit, est fermé sur l'impédance d'entrée du deuxième amplificateur opérationnel pendant la phase de mémorisation.

Deux types de schémas, conduisant à des caractéristiques équivalentes, sont couramment utilisés (cf. figures ci-après).





Deux structures typiques d'un échantillonneur/bloqueur

Dans le premier schéma, une contre-réaction entre l'entrée et la sortie permet de diminuer le temps d'acquisition et éviter d'ajouter les erreurs de décalages mises en cascade. En l'absence des 2 diodes, pendant la phase de blocage, le premier amplificateur serait en saturation et, lors du retour en phase d'échantillonnage, le temps d'acquisition en serait augmenté. Les deux diodes, montées tête-bêche, permettent d'éviter cette saturation de l'amplificateur.

Le second schéma utilise le deuxième amplificateur monté en intégrateur. La résistance R_3 permet d'éviter sa saturation.

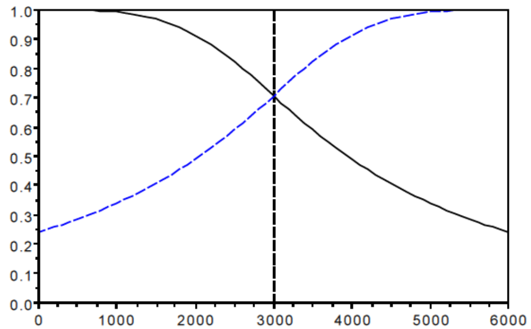
V. Filtres anti-repliement

Précisons d'abord que Nyquist n'a pas dit que si on échantillonnait à un taux N, alors on pouvait utiliser un filtre anti-repliement avec une fréquence de coupure $f_c = N/2$.

Prenons l'exemple d'un signal audio constituée d'une voix humaine que l'on veut échantillonner pour la transmettre sous forme numérique et qu'elle reste intelligible. On peut se contenter d'une bande passante [300 Hz, 3 kHz] et d'une dynamique de 40 dB, c.a.d d'un rapport («énergie signal original»)/(« énergie signal aliasé ») de 10^4. Il est également couramment admis que le spectre de la parole humaine est à peu près constant jusque bien au-dessus de 3 kHz. Cela signifie que pour réaliser un échantillonnage correct de la voix humaine, on doit filtrer les signaux aliasés pour les ramener à moins de 0.01% de l'énergie du signal vocal utile.

Que se passe-t-il si on utilise une fréquence d'échantillonnage de 6 kHz et un filtre anti-repliement du premier ordre de fréquence de coupure 3 kHz ?

La courbe en trait plein représente le spectre du signal audio en sortie du filtre passe-bas, appliqué à l'entrée de l'échantillonneur et qu'on retrouve en sortie de cet échantillonneur, tandis que la courbe en pointillé représente le spectre du signal aliasé qui va se superposer au signal utile (en module et non en dB). On constate que l'énergie du signal aliasé est exactement égale à celle du signal utile !



Est-il possible de résoudre ce problème en augmentant l'ordre du filtre ? Pas réellement ! La figure ci-après représente le résultat obtenu en utilisant un filtre

de Butterworth du 10ème ordre. La situation a été améliorée : on a maintenant un rapport 27 entre l'énergie du signal utile et celle du signal aliasé et l'énergie correspondant au signal aliasé est concentré dans la partie supérieure de la bande [300 Hz, 3 kHz] où elle ne sonnera probablement pas trop mal à l'oreille. Plus l'ordre du filtre augmente, plus la situation s'améliore, mais il faudrait arriver à un filtre d'ordre 3500 pour obtenir un rapport signal/alias de 40 dB !

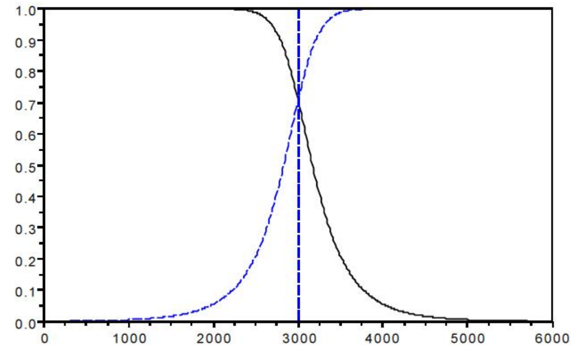


Figure 7: A Higher Order Filter with Cutoff Equal to Nyquist.

Echantillonnons maintenant le signal à 8 kHz en utilisant le même filtre d'ordre 10 que précédemment : le rapport signal / alias est maintenant de 4500. Un filtre d'ordre 12 donnera le rapport désiré.

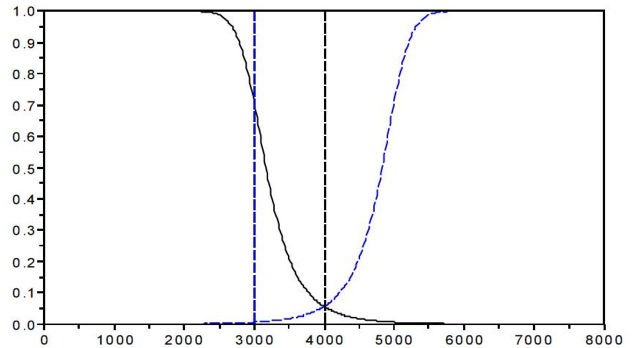


Figure 8: Sampling with Filter Cutoff Below Nyquist.

En tolérant des variations de gain dans la bande passante (Chebycheff), on peut obtenir 49 dB de rapport signal/alias avec un filtre seulement du 6ème ordre.

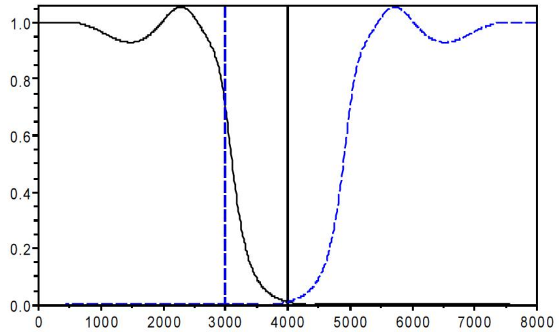


Figure 9: The Effect of a Better Filter.

Cela signifie que lorsqu'on conçoit un filtre anti-repliement, on ne peut pas se contenter de fixer sa fréquence de coupure à la valeur de la fréquence de Nyquist. On doit également prendre en compte la précision de la conversion et concevoir le filtre en conséquence.

Si on a la liberté de fixer le taux d'échantillonnage, on doit faire un compromis entre :

- un faible taux d'échantillonnage et la complexité de la conception du filtre anti-repliement nécessaire ;
- un taux d'échantillonnage plus élevé (et donc plus coûteux) et un filtre anti-repliement plus simple.

Il n'est pas rare de rencontrer des taux d'échantillonnage assez élevés, juste simplement pour faciliter la conception des filtres anti-repliement.

Ce filtre analogique doit théoriquement avoir une pente de réjection infinie, ce qui est physiquement impossible. Les filtres seront choisis avec une **pente finie d'autant plus faible que la fréquence maximale du signal est inférieure à la fréquence de Nyquist.**

Par exemple, si l'on désire échantillonner un signal de spectre utile borné par la fréquence maximale f_{max}, la fréquence d'échantillonnage sera choisie égale à $n.f_{max}$ avec n variant de 2,5 à 5 pour éloigner la fréquence de Nyquist (f_e/2) de la fréquence maximale choisie et ainsi obtenir une atténuation suffisante des fréquences images.

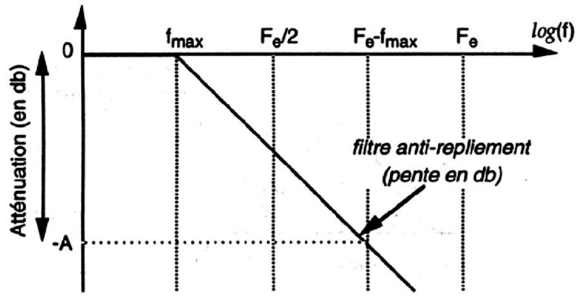
Pour avoir une atténuation A en dB au niveau de la première fréquence fantôme ou de repliement $F_e - f_{max}$, la pente p du filtre s'exprime en dB/octave suivant la relation :

$$p = \frac{A \log 2}{\log\left[\frac{F_e - f_{max}}{f_{max}}\right]}$$

$$p = \frac{A \log 2}{\log\,[n-1]}$$

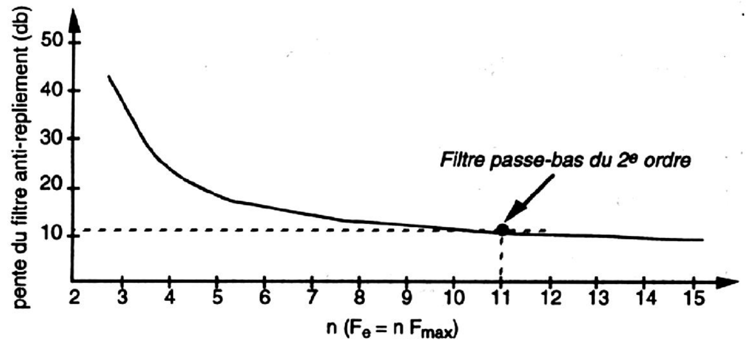
De plus, il est nécessaire de prendre en compte l'effet du bruit superposé au signal lui-même qui augmente la fréquence maximale pouvant produire une superposition de spectres. Dans la pratique la réalisation

de l'échantillonnage d'un signal sera un compromis entre la raideur du filtre passe-bas d'entrée et la fréquence d'échantillonnage.



Filtre anti-repliement de spectre

On peut ainsi remarquer que pour avoir une atténuation de 100 (soit 40 dB) au niveau de la première fréquence fantôme avec un filtre du deuxième ordre (soit une pente de – 12 dB/octave), il est nécessaire de prendre une fréquence d'échantillonnage égale à 11 fois la fréquence maximale choisie.



Évaluation de la pente du filtre anti-repliement en fonction du rapport fréquence d'échantillonnage sur fréquence maximale nécessaire pour avoir une atténuation de 100 pour la première fréquence fantôme.