Bruit de fond

Comme il l'a été dit dans le chapitre d'introduction, le bruit correspond à **tout signal indésirable limitant l'intelligibilité d'un signal utile.** Dans ce chapitre nous donnons quelques renseignements sur la nature du bruit et la notion de rapport signal/bruit.

I. Classification des sources de bruit et de perturbations

I.1. Perturbations électromagnétiques

Elles sont **crées par des sources de champ électromagnétique** (courants, tensions) ; **le champ ainsi créé peut se coupler avec des conducteurs** voisins ou éloignés, **y faisant apparaître des courants et des tensions parasites.**

Ces perturbations peuvent être éliminées ou fortement diminuées par des blindages (perturbations externes au système considéré) ou un mode de construction et de câblage soignés (perturbations internes).

I.1.a. Perturbations électromagnétiques externes

La source de bruit est localisée à l'extérieur du système ; elle agit sur alors sur celui-ci par **couplage électromagnétique**. On peut encore distinguer deux origines :

- **perturbations naturelles** (bruits cosmiques, bruits atmosphériques);
- **perturbations artificielles ou industrielles** (parasites générés par l'activité humaine et les équipements électriques industriels).

I.1.b. Perturbations électromagnétiques internes

Elles sont dues à des **variations rapides des tensions ou des courants à l'intérieur du système considéré.** On distingue 2 modes de couplage :

- **les couplages galvaniques** (conduction directe, couplage par impédance commune)
- **les couplages inductif et capacitif**.

I.2. Bruit de fond

C'est un **phénomène aléatoire dû à la nature corpusculaire de l'électricité.** Le bruit de fond est **créé à l'intérieur même des composants électroniques** (c'est donc un **bruit interne** au système), des capteurs. **Il ne peut pas être éliminé et est une fonction de la température.**
Il présente deux composantes principales :

- **bruit thermique** (dans les circuits passifs comme les résistances) ;

- **bruit de grenaille** (dans les composants actifs comme les diodes, transistors,...).

On va s'intéresser dans chapitre uniquement au bruit de fond.

II. Formalisme des processus aléatoires

II.1. Notion de signal aléatoire

Par opposition aux signaux déterministes, **le bruit de fond est un signal aléatoire,** c'est à dire que ses variations sont liées au **hasard.** Le bruit sera donc **modélisé par des fonctions aléatoires et traité par les lois de la théorie des probabilités, aussi bien dans le domaine temporel (distribution en amplitude) que dans le domaine spectral (densités spectrales)**.

Un signal aléatoire ne peut pas être complètement déterminé par un nombre fini de paramètres. Cependant, pour la plupart des signaux aléatoires d'origine physique, **une connaissance des propriétés moyennes du signal est suffisante.**

Nous verrons plus loin, que **le bruit de fond est un processus aléatoire, souvent considéré comme stationnaire et ergodique et de valeur moyenne nulle**.

II.2. Variables et fonctions aléatoires (Rappels)

Les processus aléatoires sont décrits par des **variables aléatoires.** Généralement, en électronique, ces variables aléatoires **dépendent du temps**. On parle alors de **fonctions aléatoires.** Les variables aléatoires ou les fonctions aléatoires peuvent être réelles ou complexes**.**

II.2.a. Moyennes, stationnarité, ergodicité

On peut définir **deux types de moyennes** :

- la **moyenne spatiale ou moyenne statistique ;**
- la **moyenne temporelle**.

Exemple 1 : moyenne d'une population humaine

Soit une population humaine, par exemple celle de la France, et h_n la taille de l'individu de numéro n. h varie en fonction de n (il y a des nains et des géants, des enfants et des grandes personnes), mais aussi en fonction du temps (les enfants grandissent).

Une façon "normale" de faire une moyenne est d'ajouter tous les h et de diviser par le nombre d'individus. Le résultat obtenu, que nous noterons E(h), est valable à un instant donné ; c'est la moyenne statistique de la grandeur h. En théorie des probabilités, c'est l'**espérance mathématique** de h. La taille moyenne des individus adultes ayant évolué au cours du temps (elle était plus faible il y a ans qu'aujourd'hui), le processus n'est pas stationnaire (sauf sur une fenêtre temporelle restreinte).

On peut également faire un autre type de moyenne, celle de la taille d'un individu donné au cours de sa vie :

$$\bar{h}_n = \frac{1}{T}\int_0^T h_n(t)\,\mathrm{d}t$$

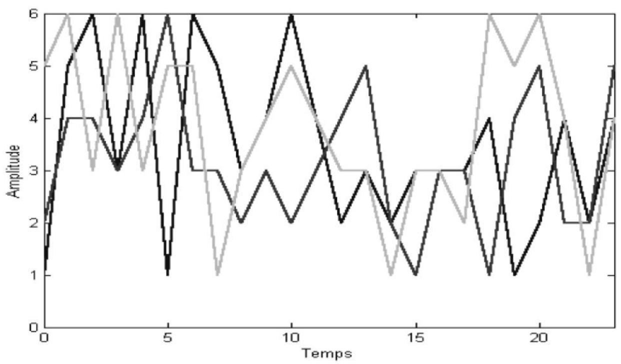
avec T durée de vie de l'individu concerné.

Le résultat dépend maintenant de n, c'est la moyenne temporelle.

Il n'y a naturellement aucune raison pour que ces deux moyennes soient identiques. Le processus n'est pas ergodique.

Exemple 2 : fonction journalier du résultat d'un jet de dé toutes les minutes

Le processus est stationnaire et ergodique



On voit donc que plusieurs cas peuvent se produire.

- **Si moyenne statistique et moyenne temporelle sont identiques, on dit que le processus est ergodique.** Ce n'est pas le cas de la population humaine, mais c'est celui du lancer de dés.
- **Si les moyennes statistiques ne dépendent pas de la période au cours de laquelle est faite la mesure, on dit que le processus est stationnaire.** C'est le cas pour le lancer de dés ; dans le cas de la population humaine, les valeurs de $E(h)$ étaient à peu près les mêmes il y a 10 000 ans et au Moyen Âge, le processus est donc stationnaire dans cette fenêtre temporelle, bien qu'il ne soit pas ergodique.

II.2.b. Variance, écart type et valeur efficace

La variance d'un ensemble de variables aléatoires est définie comme une **moyenne spatiale** :

$$\boxed{\operatorname{var} x(t_0) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[x_i(t_0)-\bar{x}(t_0)\right]^2} \qquad (3)$$

La variance représente la **moyenne quadratique de « l'écart à la moyenne »** des variables aléatoires considérées.

On note également :

$$\boxed{\operatorname{var} x(t_0) = \sigma_x^2} \qquad (4)$$

où **σ est l'écart type**.

La **valeur efficace** de la variable $x_i\ (t_0)$ est définie par une **moyenne temporelle** :

$$\boxed{x_{i\,eff}^2 = \langle x_i^2\rangle = \lim_{\Delta T\to\infty}\frac{1}{\Delta T}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T} x_i^2(t)\,dt} \qquad (5)$$

On l'appelle également « **valeur quadratique moyenne** » ou « **moment du deuxième ordre** » de la variable aléatoire.

II.3. Propriétés des variables aléatoires temporelles

II.3.a. Indépendance ou incohérence

Deux variables aléatoires temporelles x et y sont **indépendantes si la moyenne temporelle de leur produit est égale au produit de leurs moyennes temporelles** :

$$\boxed{\langle x.y\rangle = \langle x\rangle.\langle y\rangle} \qquad (6)$$

II.3.b. Stationnarité

Un processus aléatoire est stationnaire si ses propriétés statistiques d'ensemble ne dépendent pas de l'instant choisi. La stationnarité au premier ordre se traduit au niveau des moyennes par le fait que la valeur moyenne est indépendante de l'instant auquel on la calcule :

$$\boxed{\forall\ t_1,t_2,\ldots,t_i\ \ \bar{x}(t_1)=\bar{x}(t_2)=\ldots=\bar{x}(t_i)} \qquad (7)$$

La stationnarité au deuxième ordre se traduit au niveau des variances par :

$$\boxed{\forall\ t_1,t_2,\ldots,t_i\ \ \operatorname{var} x(t_1)=\operatorname{var} x(t_2)=\ldots=\operatorname{var} x(t_i)} \qquad (8)$$

La stationnarité stricte est difficile à vérifier. Par contre il est possible de considérer qu'un phénomène est stationnaire si ses propriétés statistiques d'ensemble ne dépendent pas de l'instant choisi sur un intervalle de temps grand devant celui du processus.

II.3.c. Ergodisme

Un processus aléatoire est dit **ergodique, si les moyennes temporelles de tous les échantillons existent et sont indépendantes de l'échantillon.**

Si le processus est de plus stationnaire, alors les moyennes statistiques et les moyennes temporelles sont identiques :

$$\boxed{\forall\, t_0, \forall\, k,\ \ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(t_0) = \lim_{\Delta T\to\infty}\frac{1}{\Delta T}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T} x_i(t)\,dt} \qquad (9)$$

Les signaux aléatoires envisagés dans la suite de ce cours et désignés sous l'appellation « bruit de fond » sont supposés stationnaires au moins jusqu'à l'ordre 2 et ergodiques.

Relation entre valeur efficace et variance d'un processus ergodique

Sur un nombre d'échantillons relativement grand, la variance de la variable aléatoire temporelle *X(t)* , stationnaire et ergodique s'écrit sous la forme :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N}\left(x - \langle x\rangle\right)^2 \qquad (10)$$

Développons la relation :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} x^2 - 2.\langle x\rangle \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} x + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N}\langle x\rangle^2 \qquad (11)$$

En considérant les équations (5), (1) et (9), on obtient :

$$\boxed{\sigma_x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = x_{eff}^2 - \bar{x}^2} \qquad (12)$$

Dans le cas où le signal aléatoire est à valeur moyenne nulle, la relation précédente se réduit à :

$$\boxed{\sigma_x^2 = x_{eff}^2}$$

La variance représente alors la puissance associée au processus aléatoire.

Addition de deux processus indépendants ergodiques centrés

Les valeurs efficaces des 2 processus aléatoires indépendants centrés s'ajoutent quadratiquement.

II.4. Distribution d'amplitude

II.4.a. Fonction de répartition ou fonction de distribution

La fonction de répartition F(x) d'un processus aléatoire x_1 est la probabilité qu'a son amplitude instantanée $x_1(t)$ d'être inférieure à une valeur de référence x donnée :

$$\boxed{F(x) = Prob\left[x_1(t) < x\right]} \qquad (19)$$

La fonction de répartition prend ses valeurs dans l'intervalle [0, 1] et tend vers 1 quand x tend vers l'infini.

II.4.b. Densité de probabilité

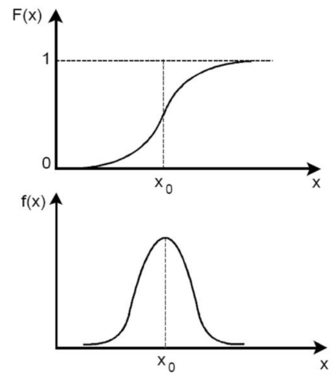
On associe à la fonction de répartition la notion de **densité de probabilité**, définie comme la **dérivée de la fonction de répartition par rapport à x** :

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \qquad (20)$$

La densité de probabilité caractérise la distribution d'amplitude en position (quelle est l'amplitude la plus probable) et en dispersion (quelles sont les valeurs que l'amplitude a une probabilité significative de prendre), mais elle ne donne aucune indication sur la rapidité des ses variations temporelles.

La densité de probabilité obéit à une condition de normalisation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\mathrm{d}x = 1 \qquad (21)$$



Exemple de fonction de distribution et densité de probabilité associée.

La densité de probabilité gaussienne

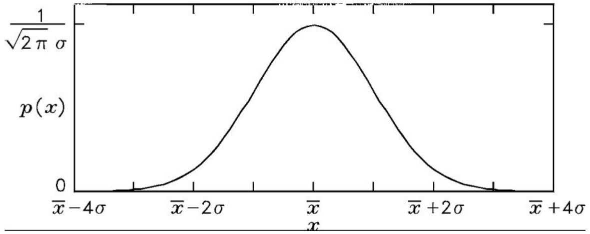
La densité de probabilité gaussienne ou normale est la plus importante dans l'étude du bruit. Lorsque les variations d'un processus sont causées par un grand nombre N d'évènements aléatoires indépendants ayant tous la même densité de probabilité, on peut montrer que la densité de probabilité qui lui est associée tend vers une fonction gaussienne lorsque $N \to \infty$. La convergence est très rapide et le résultat est peu modifié si les composantes ne sont pas totalement indépendantes.

Le bruit électronique étant généré par des mouvements aléatoires de très nombreux porteurs de charge, il peut être décrit par une densité de probabilité normale.

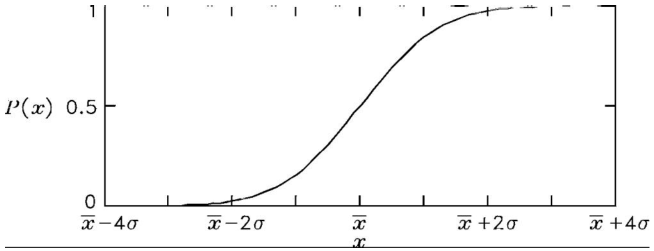
Soit x une variable aléatoire gaussienne de variance σ^2 ; sa fonction de densité de probabilité est donnée par :

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[\frac{-(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}\right]}$$

Cette fonction est tracée page suivante ; son allure la fait souvent appeler "courbe en cloche". La valeur maximum est obtenue pour $x = \bar{x}$ et elle est inversement proportionnelle à σ. Si $\sigma \to 0$, la valeur maximum tend vers l'infini, la largeur de la courbe tend vers 0 et la fonction devient une impulsion de Dirac.



Tracé de la densité de probabilité gaussienne



Tracé de la distribution de probabilité gaussienne

La probabilité que l'amplitude x soit comprise dans l'intervalle $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$ est égale à 0.683 ou 68.3%. Comme cette valeur correspond environ à 2/3, on a coutume de dire que l'amplitude d'un processus aléatoire gaussien est comprise pendant les 2/3 du temps dans un intervalle de largeur ± σ autour de sa valeur moyenne.

II.4.c. Moments

On peut définir les différents moments à partir de la densité de probabilité.

Moment du premier ordre ou valeur moyenne

$$\boxed{\langle x\rangle = \bar{x} = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx} \qquad (22)$$

Moment du deuxième ordre ou moyenne quadratique

$$\boxed{\langle x^2\rangle = \overline{x^2} = E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x).dx} \qquad (23)$$

II.5. Covariance et fonction d'autocorrélation

II.5.a. Covariance

Définition

Considérons une fonction aléatoire $x(t)$ et la valeur de deux échantillons $x(t_1)$ et $x(t_2)$, aux instants t_1 et t_2.

La covariance est définie par :

$$\boxed{C_{xx}(t_1,t_2) = E\left[x(t_1).x(t_2)\right]} \qquad (25)$$

Introduisons le décalage τ entre les instants d'observation :

$$\tau = t_2 - t_1 \qquad (26)$$

La covariance s'exprime alors par :

$$\boxed{C_{xx}(t_1,\tau) = E\left[x(t_1).x(t_1+\tau)\right]} \qquad (27)$$

Considérons maintenant le cas où la fonction aléatoire $x(t)$ est complexe, c'est à dire où elle peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = A(t) + j.B(t) \qquad (28)$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions aléatoires réelles.

Dans ce cas, la covariance s'exprime sous la forme :

$$\boxed{C_{xx}(t_1,\tau) = E\left[x(t_1).x^*(t_1+\tau)\right]} \qquad (29)$$

$x*$ représentant le complexe conjugué de la fonction aléatoire x.

Propriétés

Si le décalage entre les instants d'observation s'accroît indéfiniment, les valeurs des deux échantillons deviennent indépendantes. La relation (27) se réduit au produit des espérances mathématiques :

$$\boxed{\lim_{\tau\to\infty} C_{xx}(t_1,\tau) = E\left[x(t_1)\right].E\left[x(t_1+\tau)\right]} \qquad (30)$$

Lorsque l'écart de temps entre les deux observations diminue, la covariance atteint sa valeur maximum. On a donc :

$$\boxed{C_{xx}(t_1,0) > C_{xx}(t_1,\tau)} \qquad (31)$$

II.5.b. Fonction d'autocorrélation

Définition

La fonction d'autocorrélation est la covariance d'une fonction aléatoire stationnaire au deuxième ordre ; elle ne dépend donc que de τ :

$$\boxed{C_{xx}(\tau) = E\left[x(t).x(t+\tau)\right]} \qquad (32)$$

On en déduit (dans le cas d'un processus ergodique pour lequel moyennes temporelle et statistique sont égales) :

$$\boxed{C_{xx}(\tau) = \lim_{\Delta T\to\infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{t_0}^{t_0+\Delta T} x(t).x(t+\tau).dt} \qquad (33)$$

Dans le cas d'une fonction aléatoire complexe, la fonction d'autocorrélation est :

$$C_{xx}(\tau)=E\left[x(t).x^*(t+\tau)\right] \quad (34)$$

Propriétés

Lorsque $\tau=0$, on a :

$$\boxed{C_{xx}(0)=E\left[x^2(t)\right]=\left\langle x^2\right\rangle=x_{eff}^2} \quad (35)$$

$$C_{xx}(\tau)\le C_{xx}(0)$$

En raison de la stationnarité au deuxième ordre, la fonction d'autocorrélation est paire. En effet, en remplaçant t par (t - τ) dans la relation (32), on ne change pas la valeur de la fonction d'autocorrélation :

$$\boxed{C_{XX}(\tau)=E\left[x(t).x(t+\tau)\right]=E\left[x(t-\tau).x(t)\right]=E\left[x(t).x(t-\tau)\right]=C_{XX}(-\tau)} \quad (36)$$

Dans le **cas d'un processus ergodique**, on a :

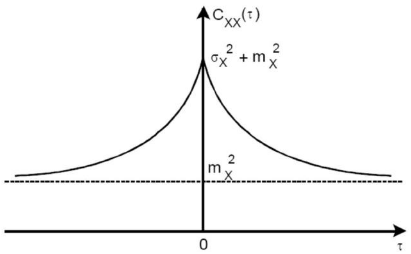
$$\boxed{\lim_{\tau\to\infty} C_{xx}(\tau)=E\left[x^2(t)\right]=\overline{x}^2} \quad (38)$$

$$\boxed{C_{xx}(0)=E\left[x^2(t)\right]=\left\langle x^2\right\rangle=x_{eff}^2=\sigma_x^2+\overline{x}^2} \quad (39)$$

Dans le cas d'un **processus à valeur moyenne nulle (c'est le cas du bruit de fond)**, ces relations deviennent :

$$\boxed{\lim_{\tau\to\infty} C_{xx}(\tau)=0}$$

$$\boxed{C_{xx}(0)=x_{eff}^2=\sigma_x^2}$$



Fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire et ergodique (m_X représente la valeur moyenne)

II.5.c. Fonctions d'intercorrélation

Définition

La liaison entre deux fonctions aléatoires stationnaires $x(t)$ et $y(t)$ est caractérisée par les fonctions d'intercorrélation définies par :

$$\boxed{C_{xy}(\tau)=E\left[x(t).y(t+\tau)\right]} \quad (40)$$

$$\boxed{C_{yx}(\tau)=E\left[y(t).x(t+\tau)\right]} \quad (41)$$

En tenant compte de la relation (33), on a :

$$\boxed{C_{xy}(\tau)=\lim_{\Delta T\to\infty}\frac{1}{\Delta T}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T} x(t).y(t+\tau).dt} \quad (42)$$

Propriétés

$$\boxed{C_{xy}(\tau)=C_{yx}(\tau)} \quad (43)$$

$$\boxed{C_{xy}(\tau)\neq C_{xy}(-\tau)} \quad (44)$$

II.6. Densité spectrale de bruit

Les propriétés spatiales ou temporelles ne sont pas suffisantes pour caractériser un bruit. Il faut également étudier son spectre, c'est à dire en faire une analyse dans le domaine fréquentiel.

Lorsque l'on écoute un disque ancien sur une chaîne HiFi, on entend un bruit de fond important. L'interposition dans la chaîne d'amplification d'un filtre passe-bas se traduit par une atténuation du bruit et une sensation auditive plus agréable.

Afin de quantifier cet effet, il faut connaître la répartition spectrale du bruit. La transformée de Fourier est l'outil mathématique qui permet de déterminer le spectre d'une fonction $x(t)$. Cependant, dans le cas d'un signal aléatoire, nous ne connaissons pas l'expression de $x(t)$, mais seulement ses propriétés statistiques, contenues dans la fonction d'autocorrélation.

La transformée de Fourier $S_x(f)$ de la fonction d'autocorrélation $C_{xx}(t)$ est appelée densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire :

$$\boxed{S_x(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(\tau)e^{-2j\pi\nu\tau}d\tau}$$

En utilisant la T.F inverse, on a également :

$$\boxed{C_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\nu)e^{+2j\pi\nu\tau}d\nu}$$

Nous avons par ailleurs vu que :

$$C_{xx}(\tau)=C_{xx}(-\tau)$$

$$C_{xx}(0) = x_{eff}^2$$

Il s'ensuit que, **comme la fonction d'autocorrélation, la densité spectrale de bruit est une fonction réelle et paire**.

On déduit des équations précédentes :

$$\boxed{x_{eff}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\nu).d\nu = 2.\int_{0}^{+\infty} S_x(\nu).d\nu}$$

Nous pouvons définir une densité spectrale de bruit $\gamma_x(f)$ pour les fréquences positives utilisées dans le domaine physique, telle que :

$$\gamma_x(f) = 2.S_x(\nu)$$

On a alors :

$$\boxed{x_{eff}^2 = \int_{0}^{+\infty} \gamma_x(f).df}$$

La densité spectrale est donc **homogène à une puissance par Hz.**

Un bruit dont la densité spectrale est indépendante de la fréquence est appelé bruit blanc, par analogie avec la lumière blanche (comme elle, il contient toutes les fréquences).

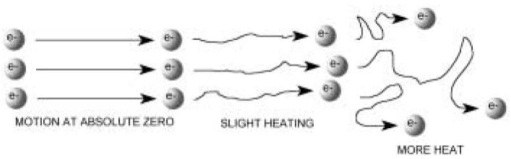
Physiquement, un bruit ne peut être blanc que dans une certaine bande de fréquences (sinon, sa puissance serait infinie).

III. Bruit thermique

III.1. Origine du bruit thermique ; formule de Nyquist

A la température ambiante, les électrons d'un matériau disposent d'une énergie $E=k.T$ leur permettant de se déplacer dans le réseau cristallin. Le déplacement de ces électrons est aléatoire (mouvement Brownien) et on parle d'agitation thermique.

Durant ces déplacements, les électrons entrent en collision avec les atomes du réseau cristallin. Dans les résistances ou les barreaux semi-conducteurs (longueur >> distance moyenne entre 2 chocs), le temps de transit des électrons d'une extrémité à l'autre du matériau devient supérieur au temps de relaxation (temps séparant deux collisions). Il en résulte une **fluctuation aléatoire du courant dans le dispositif si celui-ci se trouve dans une boucle fermée ou de la tension à ses bornes s'il est en boucle ouverte, constituant un bruit thermique.**



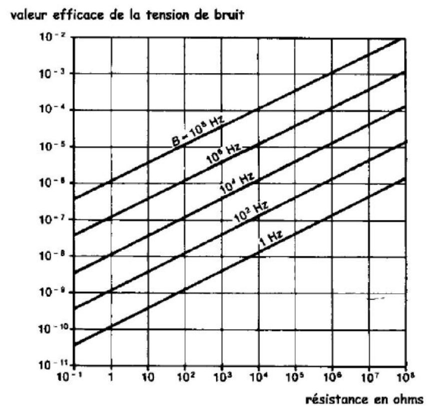
En 1906, *Einstein* avait prédit que le mouvement Brownien des électrons libres dans les métaux pourrait conduire à l'apparition d'une f.e.m fluctuante aux bornes de n'importe quelle résistance se trouvant en équilibre thermique.

Le phénomène a été mis en évidence en 1927 par *Thomson*, et quantifié par *Nyquist* l'année suivante qui a montré que la **valeur quadratique moyenne de la tension de bruit thermique générée aux bornes d'une résistance** est donnée par :

$$\boxed{\overline{v_t^2} = 4kTR\Delta f} \qquad (1)$$

où k est la constante de Boltzmann (1,3806 × 10^{-23} J.K^{-1}), T la température absolue (Kelvin), R la résistance et Δf la bande passante en Hz dans laquelle le bruit est mesuré. Cette équation est connue sous le nom de **formule de Nyquist**.

Ce bruit est par ailleurs centré (**valeur moyenne nulle**), **stationnaire** et à **fonction de répartition gaussienne**.



Valeur efficace du bruit thermique aux bornes d'une résistance en fonction de R et Δf

Remarque

La formule de Nyquist nous montre qu'une résistance est d'autant plus bruyante que sa valeur est élevée. Lorsqu'on veut réaliser un **amplificateur à faible bruit**, il faudra donc **éviter d'utiliser des résistances de valeur trop élevée** (le fait d'utiliser une résistance de valeur 10 fois plus grande multiplie la tension de bruit par 3).

Exemple numérique

Une résistance de valeur R = 100 kΩ, à la température ambiante de 20 degrés (293 K) produit du bruit blanc. Un voltmètre de bande passante 1MHz indiquera une tension de bruit B_{eff} = 40 µV$_{eff}$.

La densité spectrale de bruit est donnée par:

$$\boxed{\gamma_E = 2.S_E(\nu) = 4.K.T.R} \qquad (V^2/Hz)$$

La valeur quadratique moyenne du courant de bruit correspondant est donnée par :

$$\boxed{\overline{i_t^2} = \frac{\overline{v_t^2}}{R^2} = \frac{4kT\Delta f}{R}} \qquad (2)$$

La densité spectrale de bruit étant indépendante de la fréquence, **le bruit thermique peut être considéré comme un bruit blanc dans la gamme des fréquences électriques** (facteur correctif multiplicatif égal à *0.9999209* à 1 GHz et 300K).

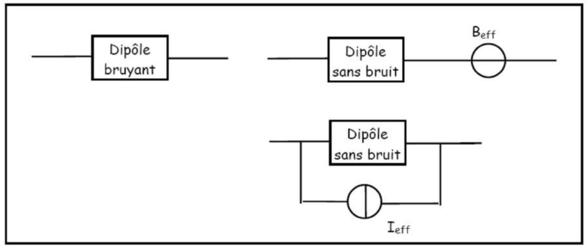
Sa densité spectrale étant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $C_{vv}(\tau)$, cette fonction d'autocorrélation est en première approximation une impulsion de Dirac :

$$C_{vv}(\tau) = 2kTR\,\delta(\tau)$$

Pratiquement, un tel bruit n'existe pas : on parlera de bruit blanc chaque fois son spectre de puissance sera constant dans la bande passante du système utilisé.

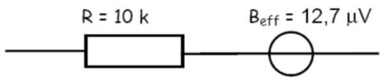
III.2. Modélisation du bruit thermique

Un dipôle bruyant sera représenté par un dipôle sans bruit associé à une source de bruit selon un modèle qui peut être de type série (source de tension) ou de type parallèle (source de courant).



Modélisation d'un dipôle bruyant

Par exemple, une résistance de R = 10 kΩ à la température de 20 degrés produit dans une bande de fréquence Δf = 1 MHz une tension de bruit $U_{eff} = (4kTR\Delta f)^{1/2} = 12{,}7\ \mu V$. Elle sera modélisée par le schéma suivant :



Facteur de crête du bruit thermique

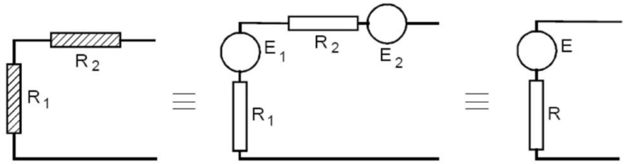
Si on assimile le bruit thermique à une variable aléatoire gaussienne, la probabilité que la valeur instantanée dépasse 3 fois la valeur efficace est de 0.27 %, la probabilité que la valeur instantanée dépasse 4 fois la valeur efficace est de 0.0063 %.

On considèrera donc généralement que **la valeur crête équivalente d'un bruit thermique est égale à 3 ou 4 fois sa valeur efficace**.

III.3. Association de résistances

III.3.a. Association série

Considérons deux résistances à la même température *T*, connectées en série.



Les processus aléatoires responsables du bruit thermique généré par chacune des résistances sont indépendants et centrés ; on a donc :

$$\begin{cases} E_{1eff}^2 = 4kTR_1\Delta f \\ E_{2eff}^2 = 4kTR_2\Delta f \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} E_{eff}^2 = E_{1eff}^2 + E_{2eff}^2 \\ E_{eff}^2 = 4kT\left(R_1+R_2\right)\Delta f \\ R = R_1 + R_2 \end{cases}}$$

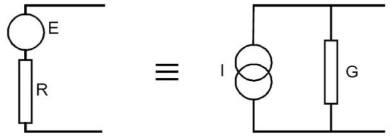
L'association en série de 2 résistances R_1 et R_2 est donc équivalente (du point de vue du bruit thermique comme de celui du signal) à une seule résistance de valeur $R_1 + R_2$.

Si la résistance R_1 est à la température T_1 et la résistance R_2 à la température T_2, on a :

$$\boxed{E_{eff}^2 = 4k\left(R_1T_1 + R_2T_2\right)\Delta f}$$

III.3.b. Association parallèle

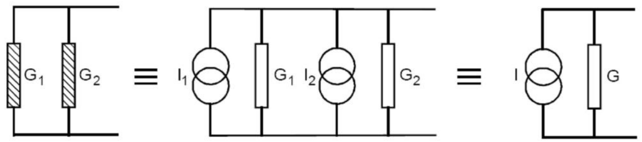
Lorsque les éléments bruyants sont associés en parallèle, l'utilisation de la représentation parallèle (utilisant les admittances) est recommandée.



Le courant de court-circuit est donné par :

$$I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{R^2} = G^2U_{eff}^2 = 4kTG\Delta f$$

Considérons deux conductances à la même température T, placées en parallèle. Les bruits apportés par chacune de ces conductances étant incohérents et de moyenne nulle, on a :



L'association en parallèle de 2 résistances R_1 et R_2 est donc équivalente (du point de vue du bruit thermique comme de celui du signal) à une seule résistance de valeur $1/R_1 + 1/R_2$.

Si la conductance G_1 est portée à la température T_1 et si la conductance G_2 est portée à la température T_2, on a :

$$I_{eff}^2 = 4k\left(G_1T_1 + G_2T_2\right)\Delta f$$

$$I_{1_{eff}}{}^2 = 4.K.T.G_1.\Delta f$$

$$I_{2_{eff}}{}^2 = 4.K.T.G_2.\Delta f$$

$$I_{eff}{}^2 = 4.K.T.(G_1+G_2).\Delta f$$

$$G = G_1 + G_2$$

III.4. Puissance de bruit thermique utilisable d'une résistance

Si l'on suppose qu'une résistance bruyante *R* est connectée aux bornes d'une résistance non-bruyante R_0, la puissance de bruit délivrée par R dans R_0 s'exprime par :

$$P = E_{eff}^2 \frac{R_0}{(R+R_0)^2}$$

La puissance est maximale lorsque la dérivée de la relation précédente par rapport à R_0 s'annule. Cela se produit pour $R_0 = R$.

Cette puissance maximale est appelée puissance de bruit utilisable et est donnée par :

$$\boxed{P_{\max} = kT\Delta f}$$

La densité spectrale de puissance de bruit thermique maximale est donc :

$$\boxed{w_{\max}(f) = w = kT}$$

On peut noter que ces valeurs maximales sont indépendantes de la valeur de la résistance.

III.5. Bruit thermique d'un dipôle passif

Un dipôle passif peut se caractériser par une impédance ou une admittance dont on connaît les parties réelles et imaginaires. Ces éléments peuvent varier avec la fréquence :

$$Z = R(f) + jX(f)$$

$$E_{eff}^2 = \gamma(f)\Delta f$$

On peut montrer que la densité spectrale de tension de bruit du dipôle passif d'impédance Z :

$$\boxed{\gamma(f) = 4kTR(f) = 4kT\Re(Z)}$$

La valeur quadratique moyenne de la tension de bruit est :

$$\boxed{E_{eff}^2 = 4kT\Re(Z)\Delta f}$$

Elle ne dépend donc que de la partie réelle de l'admittance : les éléments réactifs ne génèrent pas de bruit.

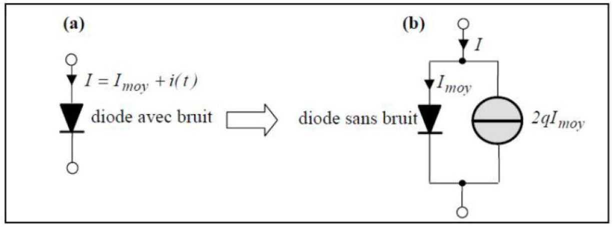
IV. Bruit de grenaille (Shot noise)

Le bruit de grenaille est lié à la structure granulaire du courant électrique. *Schottky* a observé ce bruit, qui était lié à l'émission d'électrons de la cathode d'un tube à vide à des instants aléatoires *Poissonniens*.

Valeur efficace du bruit de grenaille dans une diode en fonction du courant et de la bande passante de mesure

Le bruit de grenaille est également généré par le passage aléatoire d'électrons et de trous à travers une barrière de potentiel. On l'observe dans les dispositifs parcourus par un courant de valeur moyenne non nulle (jonction PN).

Il est modélisé par une source de courant de bruit placée en parallèle avec le dispositif physique.



Une diode avec bruit (a) est équivalente à une diode sans bruit en parallèle avec une source de courant de bruit (b)

La **valeur quadratique moyenne (ou valeur efficace au carré)** de ce courant dans une bande de fréquence Δf est donnée par :

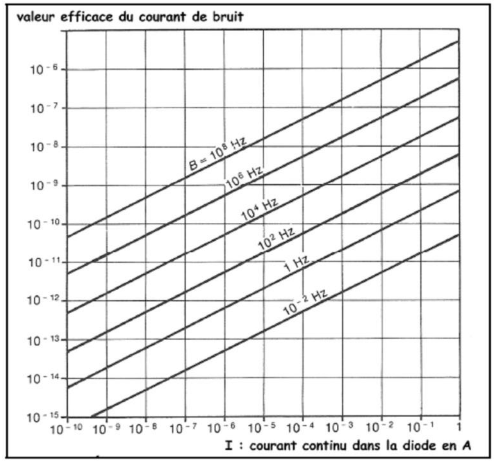
$$\boxed{\overline{i_{sh}^2} = 2qI\Delta f}$$

où q la charge de l'électron et I le courant continu circulant dans le dispositif. Cette équation a été introduite par *Schottky* en **1928** et est connue sous le nom de **formule de *Schottky***.

Par exemple, pour une diode traversée par un courant de I = 1mA et une bande de Δf = 1MHz, la valeur efficace du bruit en courant vaut : I_{eff} = 18 nA.

La **densité spectrale de bruit** est donnée par :

$$\boxed{S_i(f) = \frac{\overline{i_{sh}^2}}{\Delta f} = 2qI} \quad (24)$$

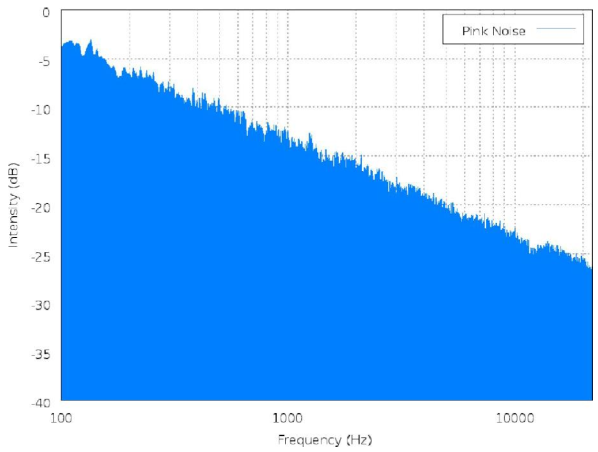


Valeur efficace du bruit de grenaille dans une diode en fonction du courant et de la bande passante de mesure

Elle augmente linéairement avec la valeur moyenne du courant dans le dispositif (contrairement au bruit thermique, il n'existe pas en l'absence de courant de conduction moyen). Elle est **indépendante de la fréquence**, le bruit de grenaille est donc un **bruit blanc** (jusqu'à une fréquence supérieure à 1 GHz), dont on admet généralement que **la loi de distribution de l'amplitude peut être modélisée par une loi gaussienne**. Ainsi, la relation entre les valeurs crêtes et rms est elle la même que celle du bruit thermique.

V. Bruit des composants réels : bruit en 1/f (Flicker Noise)

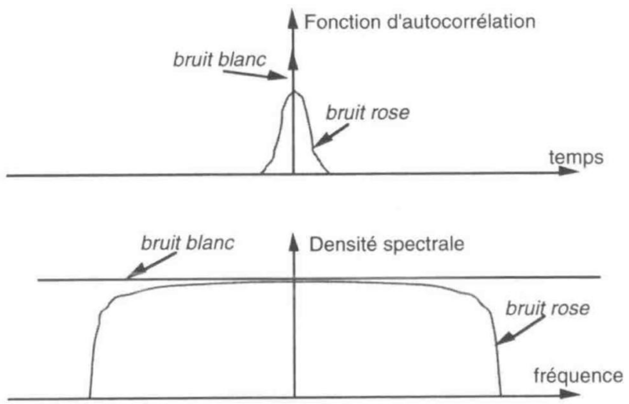
Le bruit rose



Le **bruit rose** est un signal aléatoire normalisé dont la **densité spectrale** est **inversement proportionnelle à la fréquence** (de la forme **K/f**). Cette densité spectrale tend donc vers l'infini pour les basses fréquences et vers zéro pour les hautes fréquences : dans une bande de fréquence de largeur Δf donnée, il y a donc beaucoup plus d'énergie si cette bande se situe dans les basses fréquences que si elle se situe dans les hautes fréquences. La densité spectrale **décroît donc de 3 dB par octave** (ou de **10 dB / décade**).

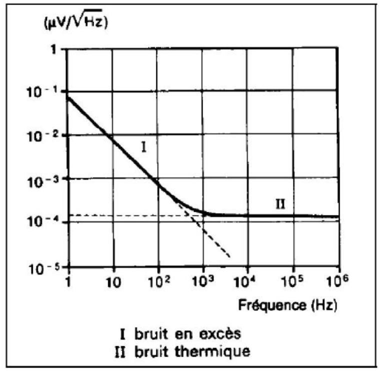
En revanche, **toutes les octaves** (et aussi toutes les décades) **contiennent la même énergie** (la largeur des octaves et des décades sur une échelle linéaire augmente quand la fréquence augmente). **Ce signal se rapproche plus de la sensibilité de l'oreille que le bruit blanc.** Pour cette raison, le bruit rose est donc souvent utilisé pour calculer la réponse fréquentielle d'une chaîne de reproduction sonore. Il peut être aussi utilisé pour mesurer les caractéristiques des transducteurs électroacoustiques (microphone, haut-parleur, enceintes). Il sert également dans l'acoustique des salles et l'acoustique du bâtiment. Par exemple, un bruit rose sera émis dans une salle via un haut-parleur et un microphone, situé dans la salle, enregistrera le signal reçu. Le spectre mesuré permet de connaître les fréquences atténuées et de les corriger via un égaliseur.

La fonction d'autocorrélation d'un bruit rose est une impulsion très étroite centrée sur $\tau = 0$.



Fonction d'autocorrélation et densité spectrale d'un bruit blanc et d'un bruit rose

Bruit en excès dans les composants réels



Densité spectrale du bruit d'une résistance de 10 kΩ

En pratique, la densité spectrale de bruit dans les résistances est plus élevée que 4kTR. En effet, le passage du courant dans une résistance génère un **bruit en excès**, ce bruit variant généralement **en 1/f** avec f la fréquence.

On trouve aussi sous les noms de bruit de scintillement, bruit de **papillotement** ; c'est un bruit rose.

Il a une **origine technologique** et s'ajoute aux bruits envisagés dans les paragraphes précédents ; son influence est prépondérante aux basses fréquences.

Les résistances à couches métalliques présentent le bruit en excès le plus faible c'est la raison pour laquelle elles sont principalement utilisées dans les amplificateurs faibles bruit.

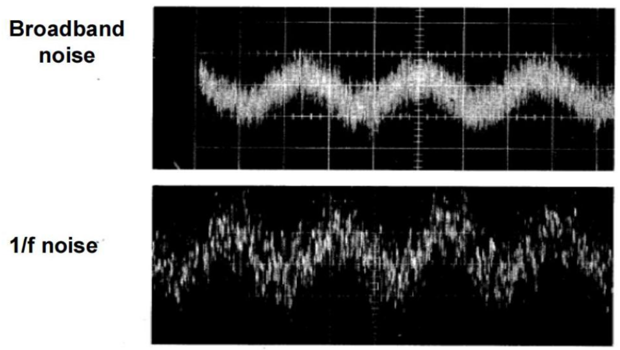
Ce type de bruit se rencontre aussi dans tous les dispositifs actifs (transistors), structures semi-conductrices distribuées, ainsi que dans les tubes à vide. Il est toujours lié au passage d'un courant.

Aucune explication générale concernant les origines de ce bruit n'a été donnée jusqu'à présent. Il est dû à des défauts :

- impuretés
- défauts dans un réseau cristallin
- interface isolant / semi-conducteur

Ces défauts constituent des centres recombinants situés soit dans le volume du matériau, soit à la surface du matériau ou à l'interface matériau-contact électrique.

Le bruit en 1/f diminue lorsqu'on améliore la qualité de fabrication des composants. Le domaine de fréquences où l'effet de scintillation est prédominant par rapport à la composante de bruit thermique ou de bruit de grenaille tend donc à se rétrécir, au fur et à mesure des progrès technologiques. Actuellement, pour les meilleures technologies, ce domaine ne dépasse pas une dizaine de hertz, mais il peut s'étendre jusqu'à une dizaine de kilohertz dans le cas de conceptions plus anciennes.



Bruit en excès dans les résistances

Le bruit total d'une résistance R comprend donc le bruit thermique et le bruit en excès (bruit basse fréquence en 1/f) dépendant du courant qui la traverse.

L'étude expérimentale montre que la densité spectrale γ(f) du bruit en 1/f est :

- inversement proportionnelle à la fréquence ;
- proportionnelle au carré de la tension continue appliquée.

$$\boxed{\gamma(f) = A\frac{U^2}{f}}$$

Index de bruit d'une résistance

Soit N_f la valeur efficace du bruit créé en excès (par rapport au bruit thermique) par une résistance sur l'intervalle de fréquence (f_1, f_2) :

$$N_f^2 = \int_{f_1}^{f_2} \gamma(f)\,df = AU^2 Ln\frac{f_2}{f_1}$$

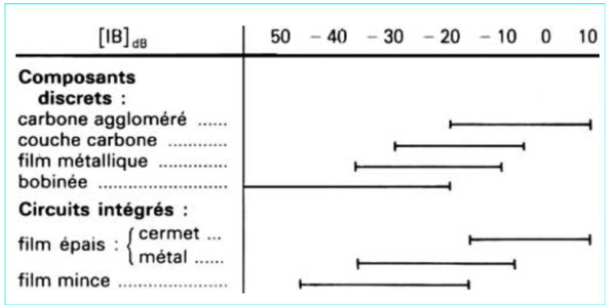
Pour $f_2 = 10.f_1$ (une décade) :

$$N_f^2 = 2{,}3\,AU^2 \quad N_f = \sqrt{2.3A}\,U$$

On voit que la valeur efficace du bruit en 1/f est indépendante de la décade sur laquelle on la calcule ou la mesure. On définit l'index de bruit de la résistance par :

$$NI_{dB/décade} = 20\log\frac{N_f}{U}$$

$$N_f \text{ en } \mu V,\ U \text{ en } V$$



Indice de bruit des résistances fabriquées par diverses technologies

Calcul pratique

Soit une résistance R = 10 kΩ, d'index de bruit NI = 0 dB, soumise à une tension continue U = 10 V.

Calculez la valeur efficace de la tension de bruit en excès sur la bande de fréquences [10 Hz, 10 kHz] ; comparez la à la valeur efficace du bruit thermique dans la même bande de fréquence.

Réponses : $N_f = 17\ \mu V$; $N_T = 1{,}25\ \mu V$

VI. Bruit des quadripôles

Comme tout composant électronique est une source de bruit potentielle, **un quadripôle ajoute son bruit propre au bruit présent à l'entrée**.

Un quadripôle, comme par exemple un amplificateur, **contient de nombreux composants et est donc difficile à analyser** du point de vue du bruit. Aussi recourt-on à un **modèle de bruit** du quadripôle **pour simplifier** cette analyse. Deux approches complémentaires sont possibles :

- définition du **facteur de bruit F_0** et de la **température équivalente de bruit** ; il s'agit là du point de vue **utilisé en H.F** ;
- définition du **modèle de bruit (E_n, I_n)** ; c'est le point de vue **utilisé en B.F** (en particulier pour les amplificateurs opérationnels).

VI.1. Réponse d'un filtre linéaire à un bruit

Considérons un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $r(t)$ et de fonction de transfert $G(\nu)$. Les grandeurs $r(t)$ et $G(\nu)$ sont liées par :

$$G(\nu) = TF\left[r(t)\right]$$

La réponse y(t) du filtre à une entrée x(t) est donnée par le produit de convolution entre le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle du filtre :

$$y(t) = r(t)\otimes x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta).r(t-\theta).d\theta$$

Calculons la fonction d'autocorrélation de y(t) :

$$C_{yy}(\tau) = E\left[y(t).y(t+\tau)\right] = E\left[\left(r(t)\otimes x(t)\right).\left(r(t+\tau)\otimes x(t+\tau)\right)^*\right]$$

$$C_{yy}(\tau) = \iint r(t-\theta').r^*(t+\tau-\theta").C_{xx}(\theta'-\theta").d\theta'.d\theta"$$

En introduisant les transformées de Fourier de r et de C_{xx} , et en intégrant en θ ' et θ " , les relations précédentes conduisent à :

$$C_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|G(\nu)\right|^2 .S_x(\nu).e^{2j\pi\nu\tau}.d\nu$$

On en déduit :

$$\boxed{S_y(\nu) = \left|G(\nu)\right|^2 .S_x(\nu)}$$

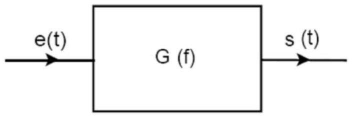
ou encore :

$$\boxed{\gamma_y(f) = \left|G(f)\right|^2 .\gamma_x(f)}$$

VI.2. Bande passante équivalente de bruit

La bande passante équivalente de bruit d'un système de fonction de transfert $G(f)$ est la **bande passante du filtre passe bas idéal (filtre cardinal) qui donnerait la même valeur quadratique moyenne de la tension de bruit en sortie qu'un filtre réel, lorsque le bruit à l'entrée du filtre est un bruit blanc**.

Considérons un filtre passe-bas de fonction de transfert $G(f)$ attaqué par un signal d'entrée bruyant $e(t)$ et délivrant un signal de sortie $s(t)$:



On a en sortie :

$$U_{S_{eff}}{}^2 = \int_0^\infty \gamma_s(f).df$$

avec :

$$\gamma_s(f) = |G(f)|^2 . \gamma_e(f)$$

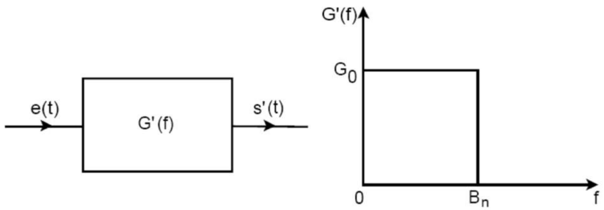
d'où :

$$U_{S_{eff}}^2 = \int_0^\infty |G(f)|^2 . \gamma_e(f).df$$

Supposons que e(t) soit un bruit blanc de densité spectrale $\gamma(f) = \gamma_0$. Nous obtenons alors :

$$U_{S_{eff}}^2 = \gamma_0 \int_0^\infty |G(f)|^2 .df$$

Considérons maintenant, la valeur quadratique moyenne de la tension de bruit à la sortie d'un filtre cardinal de fonction de transfert G'(f) égale à G_0 dans la bande passante et de bande passante B_n, où G_0 est prise égale à la transmittance statique du filtre passe-bas réel.



La valeur quadratique moyenne de la tension de bruit à la sortie du filtre cardinal est donnée par :

$$U'^2_{S_{eff}} = \gamma_0 \int_0^\infty |G'(f)|^2 .df \qquad \text{d'où} \qquad U'^2_{S_{eff}} = \gamma_0 G_0^2 .B_n$$

La définition de la bande équivalente de bruit impose :

$$U_{S_{eff}}^2 = U'^2_{S_{eff}}$$

On en déduit :

$$B_n = \frac{1}{G_0^2} \int_0^\infty |G(f)|^2 .df$$

La valeur quadratique moyenne de la tension de bruit en sortie s'écrit donc :

$$\boxed{U_{S_{eff}}^2 = G_0^2 .\gamma_0 .B_n}$$

Cette relation montre qu'**une faible valeur de B_n diminue la valeur quadratique moyenne de la tension de bruit en sortie. Cependant, B_n doit être suffisamment élevée pour transmettre correctement le signal utile.** Ces considérations imposent un choix optimum pour la bande passante d'un système.

Détermination de B_n

Comment connaître la valeur de B_n pour un filtre donné ?

a. Graphiquement

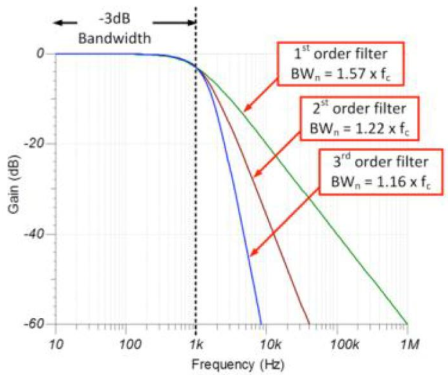
On construit la courbe $H^2(f)$ en fonction de f, on mesure la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses.

b. Expérimentalement

On applique à l'entrée du filtre un bruit blanc de densité spectrale w_0 connue et on mesure la valeur efficace du bruit en sortie ; connaissant (ou mesurant) N_S, on peut en déduire B_n.

c. Mathématiquement dans les cas simples : calcul de la bande passante équivalente de bruit d'un filtre passe-bas du 1er ordre

Noise Bandwidth: Brick Wall Factor



Noise Bandwidth

$BW_n = f_H * K_n$

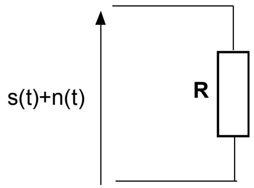
Number of Poles	K_n Brickwall Correction Factor
1	1.57
2	1.22
3	1.16
4	1.13
5	1.12

VI.3. Le facteur de bruit

VI.3.a. Rapport signal sur bruit

s(t) : signal utile de valeur efficace S

n(t) : bruit de valeur efficace N



Le rapport signal / bruit aux bornes du dipôle est défini par :

$$\boxed{SNR = \frac{Puissance\,du\,signal\,utile}{Puissance\,du\,bruit} = \frac{P_S}{P_B}}$$

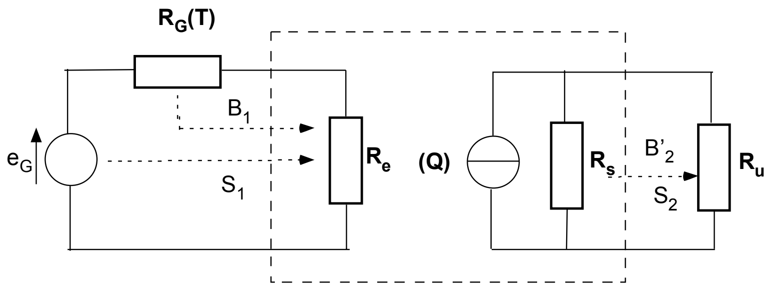
Les puissances de bruit et de signal sont dissipées dans la même résistance R :

$$\boxed{SNR = \frac{S^2/R}{N^2/R} = \frac{S^2}{N^2}} \qquad \boxed{SNR_{dB} = 10\log\gamma}$$

Une audition « confortable » en radiodiffusion requiert un rapport signal / bruit de 60 dB, 40 dB en téléphonie.

VI.3.b. Définition du facteur de bruit

Soit Q un quadripôle linéaire, passif ou actif, bruyant, commandé par une source à la température T et débitant sur une charge R_u.



- S_1 = puissance de signal fournie par la source à l'entrée du quadripôle (sinusoïdale)
- S_2 = puissance de signal fournie par le quadripôle à la charge
- B_1 = puissance de bruit fournie par la source à l'entrée du quadripôle
- B'_2 = puissance de bruit fournie par le quadripôle à la charge

$$\boxed{SNR_1 = \frac{S_1}{B_1} \quad rapport\ signal\,/\,bruit\ à\ l'entrée\ du\ quadripôle}$$

$$\boxed{SNR_2 = \frac{S_2}{B'_2} \quad rapport\ signal\,/\,bruit\ à\ la\ sortie\ du\ quadripôle}$$

Si le quadripôle était non-bruyant, on aurait : $\gamma_2 = \gamma_1$. Le facteur de bruit du quadripôle pour le montage considéré est défini par :

$$\boxed{F = \frac{SNR_1}{SNR_2} > 1}$$

F caractérise la dégradation du rapport signal/bruit entre l'entrée et la sortie du quadripôle.

$$F = \frac{\frac{S_1}{B_1}}{\frac{S_2}{B'_2}} = \frac{B'_2}{\frac{S_2}{S_1}.B_1}$$

Or, $S_2/S_1 = A_p$ représente l'amplification en puissance du quadripôle dans le montage considéré. On en déduit :

$$F = \frac{B'_2}{A_p.B_1}$$

Soit B_2 le bruit que l'on aurait en sortie si le quadripôle était non-bruyant :

$$B_2 = A_P\,B_1$$

Ce bruit représente donc le bruit inévitable en sortie, d'où une définition équivalente du facteur de bruit :

$$\boxed{F = \frac{Bruit\ total\ en\ sortie}{Bruit\ inévitable}}$$

$B'_2 = B_2 + B_Q$ où B_Q représente le bruit généré par le quadripôle.

$B'_2 = B_Q + A_P\,B_1$, d'où : $\boxed{F = \frac{B'_2}{B_2} = 1 + \frac{B_Q}{B_2} = 1 + \frac{B_Q}{A_P B_1}}$

F n'est pas un facteur intrinsèque au quadripôle : il compare le bruit du quadripôle au bruit de la source. Il dépend :

- des valeurs relatives de R_G et R_e ;
- de la température de la source.

VI.3.c. Facteur de bruit normalisé F_0

Le facteur de bruit, censé définir les propriétés de bruit de Q, compare en réalité le bruit propre de Q à celui fourni par la source et transmis. De ce fait, F dépend d'un élément extérieur à Q, à savoir la température T de la source (et de la valeur de sa résistance interne R_G s'il n'y a pas adaptation) : F ne peut donc être qu'un élément de comparaison, par exemple entre 2 quadripôles commandés par la même source (R_G, T).

Pour faciliter cette comparaison, on a normalisé $T = T_0 = 290$ K et on s'est placé dans le cas où la source fournit sa puissance de bruit maximale (adaptation en entrée), d'où l'expression du facteur de bruit normalisé F_0 :

$$\boxed{F_0 = 1 + \frac{B_Q}{A_P k T_0 \Delta f}}$$

VI.3.d. Application numérique

On considère un amplificateur intégré passe-bande H.F pour lequel le constructeur donne les spécifications suivantes :

$f_0 = 60$ MHz ; $B_s = 0.5$ MHz

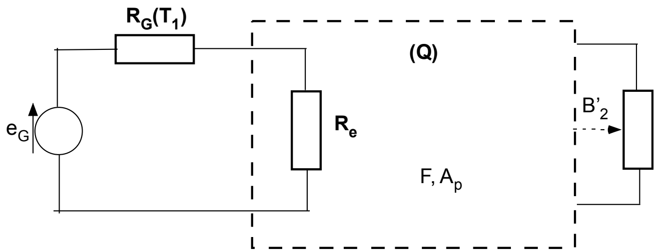
Entrée et sortie adaptées sur 50 Ω ; $G_p = 35$ dB ; $F_0 = 5$ dB.

Calculez la tension d'entrée nécessaire pour obtenir en sortie un rapport signal/bruit $\gamma_2 = 60$ dB en sortie.

VII. Température équivalente de bruit

VII.1. Définition

Soit un quadripôle bruyant (Q), commandé par une source à la température T_1. On suppose que l'on a adaptation d'impédance à l'entrée : $R_G = R_e$.



La source de commande fournit donc au quadripôle une puissance de bruit $B_1 = k\,T_1\,B_n$.

Soit A_p l'amplification en puissance (pour une charge donnée) et B_1 la puissance de bruit fournie par la source au quadripôle. On a :

$$B_1 = kT_1B_n \quad B_2 = A_p\,B_1 = A_p\,k\,T_1\,B_n$$

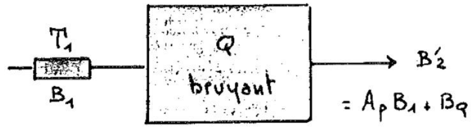
$$B_2' = F\,B_2 = F\,A_p\,k\,T_1\,B_n \quad B_Q = B_2' - B_2 = A_p\,k\,T_1\,B_n\,(F-1)$$

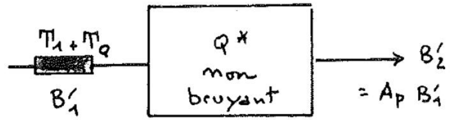
On pose : $\boxed{(F-1)T_1 = T_Q}$: **T_Q est appelée température équivalente de bruit du quadripôle.**

On a alors :

$$B_Q = A_p\,k\,T_Q\,B_n \quad B_2' = B_2 + B_Q = A_p\,k\left(T_1 + T_Q\right)B_n$$

Tout se passe comme si on avait un quadripôle non-bruyant et une source à la température T + T_Q.





Q est alors caractérisé de façon intrinsèque.

Calcul de T_Q

$$\begin{cases} B_1 = k\,T_1\,B_n & B_2' = A_p k\,T_1 B_n + B_Q \\ B_1' = k\left(T_1 + T_Q\right)B_n & B_2' = A_p k\left(T_1 + T_Q\right)B_n \end{cases} \Rightarrow kT_QB_n = \frac{B_Q}{A_p}$$

Relation avec le facteur de bruit normalisé

$$\boxed{F_0 = 1 + \frac{B_Q}{B_2} = 1 + \frac{A_p\,k\,T_Q\,B_n}{A_p\,k\,T_0\,B_n} = 1 + \frac{T_Q}{T_0}}$$

Pour les quadripôles à faible bruit, la "sensibilité de T_Q est meilleure.

F_0 (dB)	0.05	0.10	0.20
F_0 (lin)	1.012	1.023	1.047
T_Q (K)	3.4	6.8	14

Application numérique

Pour le circuit étudié précédemment, calculez la température équivalente de bruit.

VII.2. Association de quadripôles en cascade

On considère, par exemple, le cas de 3 quadripôles Q_1, Q_2 et Q_3, de températures équivalentes de bruit respectives T_{Q1}, T_{Q2}, T_{Q3}, cascadés dans cet ordre, le quadripôle Q_1 étant commandé par une source à la température T_1. On suppose que l'adaptation d'impédances est réalisée à l'entrée et entre étages.

La puissance de bruit en sortie est égale à la somme :

- du bruit de la source, amplifié par les 3 quadripôles ;
- du bruit du quadripôle Q_1, amplifié par les 2 quadripôles Q_2 et Q_3 ;
- du bruit du quadripôle Q_2, amplifié par le quadripôle Q_3 ;
- du bruit du quadripôle Q_3.

Elle peut donc s'écrire :

$$B = k\,T_1\,A_{p_1}\,A_{p_2}\,A_{p_3} + k\,T_{Q_1}\,A_{p_1}\,A_{p_2}\,A_{p_3} + k\,T_{Q_2}\,A_{p_2}\,A_{p_3} + k\,T_{Q_3}\,A_{p_3}$$

La puissance de bruit équivalente à l'entrée est égale à B /(A_{p1}. A_{p2}. A_{p3}) :

$$B = k\left(T_1 + T_{Q_1} + \frac{T_{Q_2}}{A_{p_1}} + \frac{T_{Q_3}}{A_{p_1}A_{p_2}}\right)B_n = k\left(T_1 + T_{eq}\right)B_n$$

d'où la température de bruit équivalente (à l'entrée de la chaîne) :

$$\boxed{T_Q = T_{Q1} + \frac{T_{Q_2}}{A_{p_1}} + \frac{T_{Q_3}}{A_{p_1}\ A_{p_2}}}$$

Si $A_{P1} >> 1$, $T_Q \approx T_{Q1}$: **le bruit vient essentiellement du premier étage**.

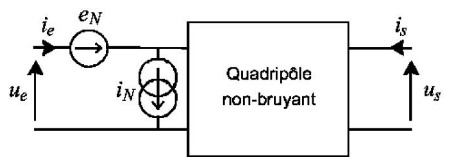
Facteur de bruit

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{A_{p_1}} + \frac{F_3 - 1}{A_{p_1}\ A_{p_2}}$$

VIII. Le modèle (E_n, I_n)

VIII.1. Définition

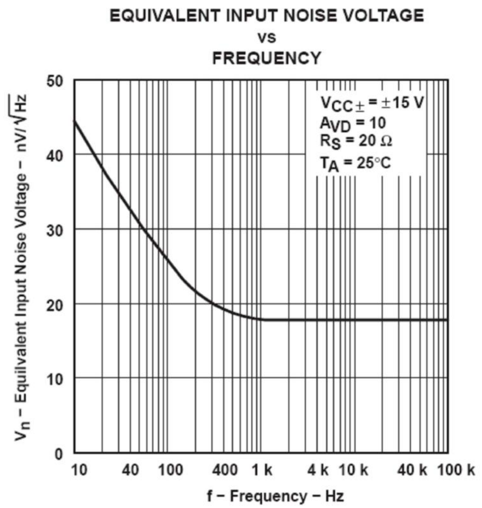
Un quadripôle bruyant (Q) peut se représenter sous la forme d'un quadripôle non bruyant (Q^*) auquel sont associés une source de tension de bruit et une source de courant de bruit en entrée.



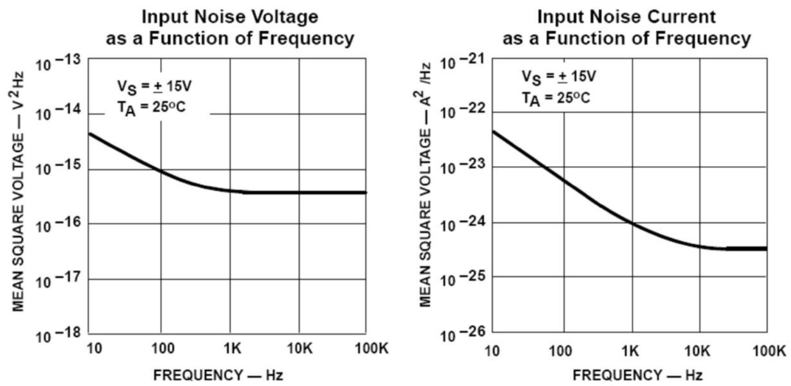
Représentation matrice de chaîne, sources de bruit ramenées en entrée.

L'ensemble (Q^*, E_n, I_n) fournit en sortie le même bruit que (Q). E_n et I_n sont définis pour une fréquence f (dans une bande de fréquence $\Delta f = 1$ Hz) ; ils varient en fonction de la fréquence.

Les constructeurs d'amplificateurs opérationnels spécifient les performances de leurs circuits à l'aide de ce modèle (voir ci-dessous).



Amplificateur opérationnel TL081



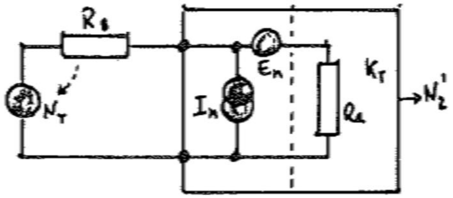
Amplificateur opérationnel 741

VIII.2. Bruit équivalent à l'entrée

VIII.2.a. Calcul du bruit en sortie

A partir du schéma de bruit ci-contre, on calcule :

$$N_2'^2 = \left[\left(N_T^2 + E_n^2\right)\left(\frac{R_e}{R_e + R_s}\right)^2 + \left(\frac{R_e R_s}{R_e + R_s}\right)^2 I_n^2\right].A_v^2$$



A_v représentant l'amplification en tension du quadripôle.

Pour le signal, la puissance en sortie est donnée par :

$$S_2 = U^2 = E^2\left(\frac{R_e}{R_e + R_s}\right)^2.A_v^2$$

D'où la possibilité de calculer $\gamma_2 = S_2 / B'^2$, ce qui, en définitive, nous intéresse.

VIII.2.b. Bruit équivalent à l'entrée

Soit K_T le coefficient d'amplification entre la sortie et la f.e.m de la source ; on a :

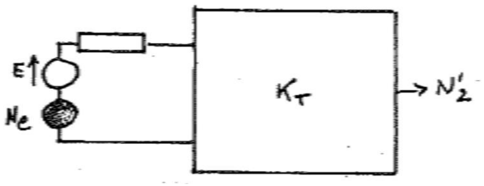
$$K_T = \frac{R_e}{R_e + R_s}.A_v$$

Divisons $N_2'^2$ par K_T^2 et posons : $N_e^2 = N_2'^2 / K_T^2$; on a alors :

$$\boxed{N_e^2 = N_T^2 + E_n^2 + R_s^2 I_n^2}$$

N_e est le bruit équivalent à l'entrée.

Le nouveau schéma est donc constitué d'un quadripôle non bruyant Q*, de transmittance K_T, commandé par une source de bruit N_e (et une source de signal E). A la sortie, le rapport signal/bruit est donné par :



$$\gamma_2 = \frac{S_2}{B_2'} = \frac{K_T^2 E^2}{K_T^2 N_e^2} = \frac{E^2}{N_e^2}$$

On remarque que l'impédance d'entrée Z_e disparaît dans cette façon de faire. En réalité, elle est contenue dans K_T et réapparaît lorsqu'on veut calculer explicitement B'_2 et S_2.

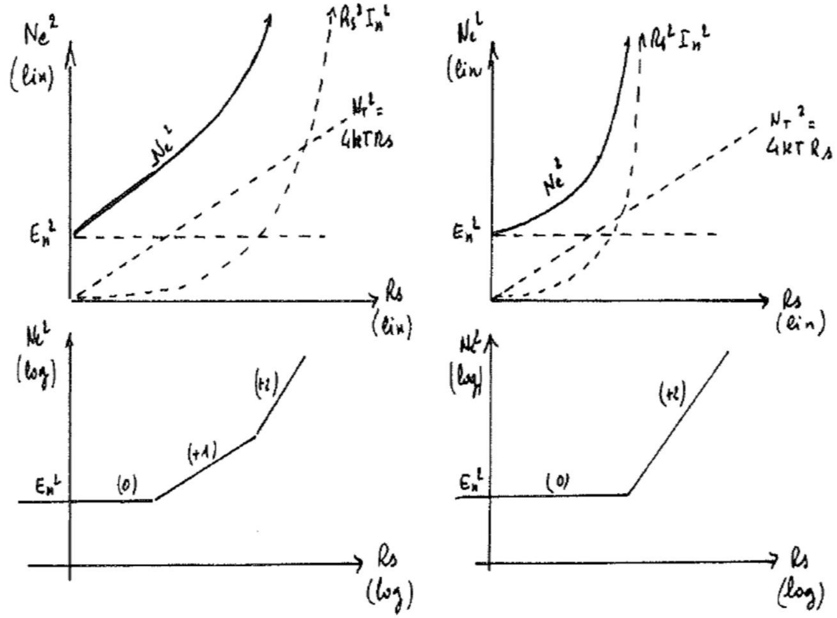
Remarque

Dans le cas où les sources $E_n$et I_n seraient corrélées, on écrirait :

$$N_e^2 = N_T^2 + E_n^2 + R_s^2 I_n^2 + 2C.\left(E_n\right).\left(R_s I_n\right)$$

VIII.2.c. Courbes

Selon les valeurs respectives de E_n et I_n, on peut trouver les deux allures ci-dessous.



Application numérique

Un professeur veut faire vérifier à ses étudiants la loi de Nyquist, pour R compris entre 0 et 100 kΩ. Que doit valoir le I_n de l'amplificateur de mesure ?

On veut que le bruit ramené à l'entrée de l'amplificateur puisse s'écrire sous la forme :

$$N_e^2 = N_T^2 + E_n^2 = E_n^2 + 4kTR_s$$

Il faut donc que le terme $R_s^2 I_n^2$ soit environ le 100ème de $4kTR_s$:

$$R_s^2 I_n^2 \le \frac{1}{100} 4kTR_s \qquad I_n^2 \le \frac{4kT}{100 R_s} = 16.10^{-28}\ A^2/Hz$$

$$I_n \le 4.10^{-14}\ A/\sqrt{Hz}$$

Ceci impose un étage d'entrée à FET.

VIII.2.d. Mesures

La simplicité des mesures des éléments du modèle justifie son succès :

- lorsque la résistance R_S de la source est nulle, on a : $N_e^2 = E_n^2$;
- lorsque R_S est grande, le terme $R_s^2 I_n^2$ devient dominant et on a : $N_e^2 \approx R_s^2 I_n^2$

Voir pour plus de détails la note d'application Texas Instruments *Noise Analysis in Operational Amplifier Circuits.*

IX. Relation entre facteur de bruit et modèle (E_n, I_n)

On a :

$$F_0 = \frac{Puissance\,de\,bruit\,totale}{Puissance\,de\,bruit\,thermique\,de\,la\,source} = \frac{N_e^2}{N_T^2}$$

$$F_0 = \frac{4kT_0R_S + \left(E_n^2 + R_s^2 I_n^2\right)}{4kT_0R_S} = 1 + \frac{E_n^2}{4kT_0R_S} + R_S\frac{I_n^2}{4kT}$$

F_0 est donc fonction de la résistance de la source. Il passe par un minimum F_{0min} pour une valeur particulière R_{opt} de R_S :

$$\frac{E_n^2}{4kT_0R_{opt}} = R_{opt}\frac{I_n^2}{4kT}$$

$$\boxed{R_{opt} = \frac{E_n}{I_n} \qquad F_{0\min} = 1 + \frac{2E_nI_n}{4kT_0}}$$

Discussion

- **Pour un amplificateur donné, on obtient le minimum de bruit en sortie pour R_S = 0** ($N_e^2 = E_n^2$) ; remarquons que F_0 tend vers l'infini).

- **Pour une source de résistance R_S donnée**, il existe un **amplificateur optimal** qui ajoute le minimum de bruit au bruit thermique de la source : c'est celui, caractérisé par (E_n, I_n), tel que $\boxed{\frac{E_n}{I_n} = R_{opt} = R_S}$.

  En général, il est difficile de fabriquer cet amplificateur. Aussi utilise-t-on la technique de transformation d'impédances par transformateur.

- R_{opt} est différente de la valeur réalisant l'adaptation d'impédances ; ce n'est pas un problème en BF.