UV Automatique

Cours 3

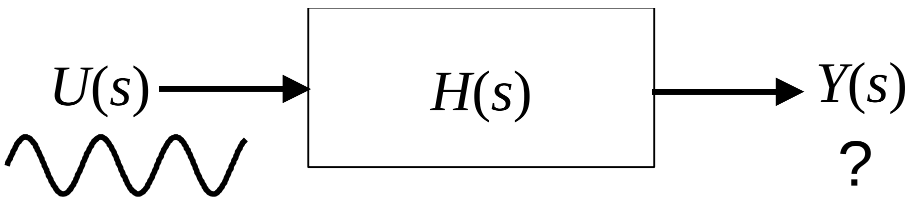
Réponse fréquentielle des systèmes dynamiques continus LTI

ASI 3

Contenu

Introduction (1)

❑ Système continu LTI



$H(s)$: fonction de transfert

Entrée du système : signal sinusoïdal $u(t) = A\sin\omega t$

Quelle est la réponse harmonique du système ?

❑ Analyse fréquentielle

Pour $s=j\omega$, on a : $Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega)$

Si $u(t)$ et $y(t)$ sont des signaux à énergie finie, alors $U(j\omega)$ et $Y(j\omega)$ sont les transformées de Fourier de u et y

$$Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |Y(j\omega)| = |H(j\omega)|\,|U(j\omega)| \\ \arg Y(j\omega) = \arg H(j\omega) + \arg U(j\omega) \end{cases}$$

Introduction (2)

- Analyse fréquentielle

$|H(j\omega)|$: gain du système à la pulsation ω

$\varphi(\omega) = \arg Y(j\omega) - \arg U(j\omega)$: déphasage entre la sortie et l'entrée à la pulsation ω avec $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$

Réponse harmonique du système en régime permanent

$$u(t) = A\sin\omega t \quad \Rightarrow \quad y(t) = A|H(j\omega)|\sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

$H(j\omega)$ traduit le comportement fréquentiel du système

- Outils d'analyse de $H(j\omega)$
  - Lieu de Bode
  - Lieu de Nyquist
  - Lieu de Black

Lieu de Bode (1)

Définition

Le lieu de Bode consiste à représenter $H(j\omega)$ quand ω parcourt $\mathbb{R}^+$ par deux diagrammes :

- Diagramme de gain représentant le module $|H(j\omega)|$ en fonction de la pulsation ω
  - Abscisse : pulsation ω (rad/s) en échelle logarithmique
  - Ordonnée : gain exprimé en décibels (dB), soit

$$G(\omega) = 20\log_{10}|H(j\omega)|$$

- Diagramme de phase représentant l'argument $\varphi(\omega)$ en fonction de la pulsation ω
  - Abscisse : pulsation ω (rad/s) en échelle logarithmique
  - Ordonnée : phase $\varphi(\omega)$ en degré (°) ou radian (rad)

Lieu de Bode (2)

Principes

Soit $H(s)$ une fonction de transfert factorisée sous la forme :

$$H(s) = H_1(s)\, H_2(s)\, \cdots\, H_n(s)$$

On en déduit $H(j\omega) = H_1(j\omega)\, H_2(j\omega)\, \cdots\, H_n(j\omega)$

- **Gain (dB)**

$$G(\omega) = 20\log_{10}\left|H(j\omega)\right| = \sum_{i=1}^{n} G_i(\omega)$$

avec $G_i(\omega) = 20\log_{10}\left|H_i(j\omega)\right|$

- **Phase**

$$\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\omega) \quad \text{avec} \quad \varphi_i(\omega) = \arg H_i(j\omega)$$

Conclusion : le produit des fonctions de transfert se traduit par une somme des gains (dB) et des phases des transmittances élémentaires

Lieu de Bode (3)

Principes (fin)

$H(s)$ est factorisable à partir d'éléments de base sous la forme :

$$H(s) = ks^{\alpha} \prod_i (1+T_i s)^{\beta_i} \prod_l \left((s^2 + 2\xi_l \omega_{n,l} s + \omega_{n,l}^2) / \omega_{n,l}^2 \right)^{\gamma_l}$$

$$\xi_l \in [0\ 1[,\ \ \omega_{n,l} > 0, \qquad k, T_i \in \mathbb{R}^* \ \text{ et } \alpha, \beta_i, \gamma_l \in \mathbb{Z}$$

- Gain (dB)

$$G(\omega) = 20\log_{10}|k| + \alpha 20\log_{10}(\omega) + \sum_i \beta_i 20\log_{10}|1+j\omega T_i|$$
$$+\sum_l \gamma_l \left(20\log_{10}\left|(j\omega)^2 + 2\xi_l \omega_{n,l}(j\omega) + \omega_{n,l}^2\right| - 20\log_{10}\omega_{n,l}^2 \right)$$

- Phase

$$\varphi(\omega) = \frac{\mathrm{sgn}(k)-1}{2}\pi + \alpha\frac{\pi}{2} + \sum_i \beta_i \arg(1+j\omega T_i)$$
$$+\sum_l \gamma_l \arg\left((j\omega)^2 + 2\xi_l \omega_{n,l}(j\omega) + \omega_{n,l}^2 \right)$$

Lieu de Bode (4)

Préliminaires

Le lieu de Bode d'un système de fonction de transfert $H(s)$ peut être tracé facilement à partir de la connaissance des diagrammes de Bode des éléments de base :

- k (gain)
- $(s)^{\pm 1}$ (intégrateur ou dérivateur)
- $(1+Ts)^{\pm 1}$ (éléments du premier ordre)
- $\left(\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi}{\omega_n}s+1\right)^{\pm 1}$ (éléments du second ordre)

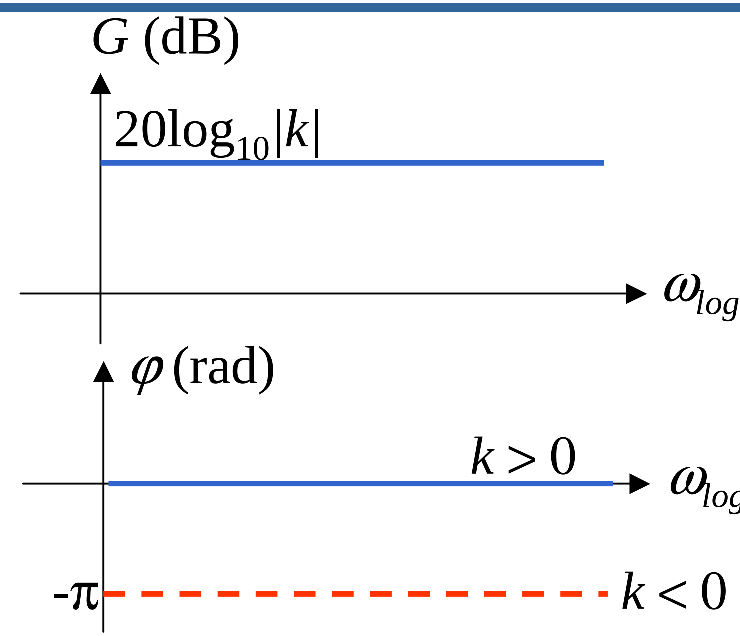
Lieu de Bode des systèmes élémentaires (1)

Gain k

- Gain $G = 20\log_{10}|k|$

Droite *horizontale*

- Phase $\varphi = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0 \\ -\pi & \text{si } k < 0 \end{cases}$



Dérivation $H(s) = s$

- Gain $G = 20\log_{10}\omega$

Droite de pente *20dB/décade*
ou *pente +1*

- Phase $\varphi = +\dfrac{\pi}{2}$

Intégration $H(s) = s^{-1}$

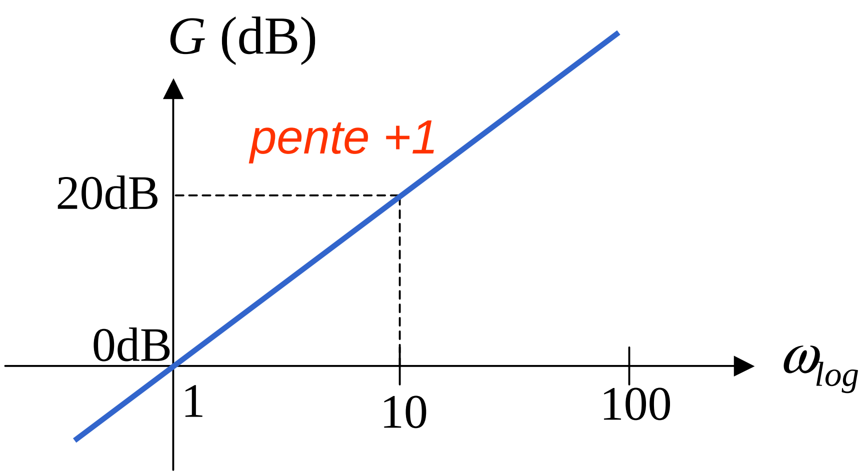
- Gain $G = -20\log_{10}\omega$

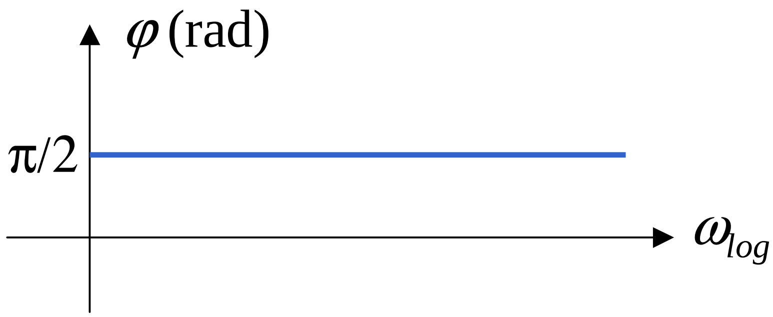
Droite de *pente -20dB/décade*
ou *pente -1*

- Phase $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

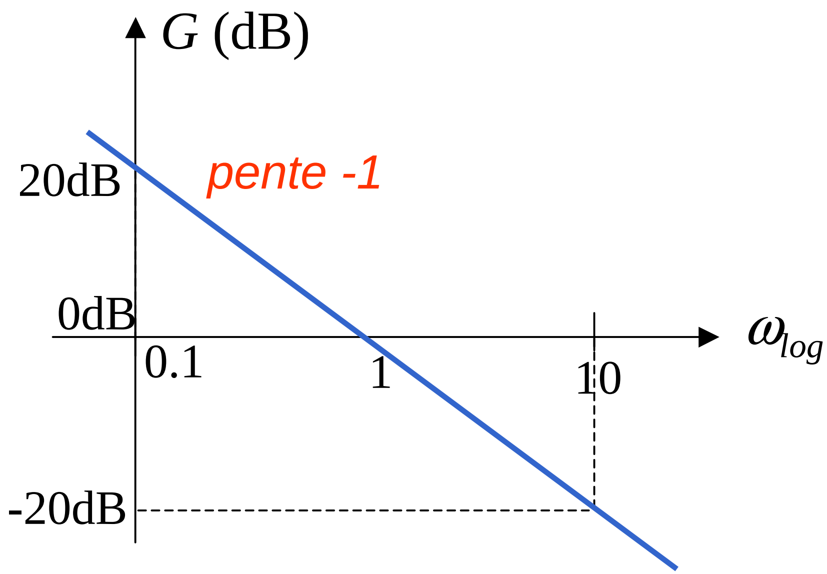
Lieu de Bode des systèmes élémentaires (2)

- Dérivation $H(s) = s^{-1}$





- Intégration



Lieu de Bode des systèmes élémentaires (3)

- Premier ordre $H(s) = 1 + Ts \quad (T > 0)$
  - Gain $G = 10\log_{10}\left(1 + \omega^2 T^2\right)$
    - $\omega T << 1,\ G \approx 0$

      asymptote *horizontale*
    - $\omega T >> 1,\ G \approx 20\log_{10}\omega T$

      asymptote de *pente +1*

    Les deux asymptotes se coupent en $\omega_c = \frac{1}{T}$
    - A $\omega = \omega_c$, on a $G = 3\text{dB}$
  - Phase $\varphi = \arctan(\omega T)$
    - $\omega T << 1,\ \varphi \approx 0$
    - $\omega T >> 1,\ \varphi \approx \frac{\pi}{2}$

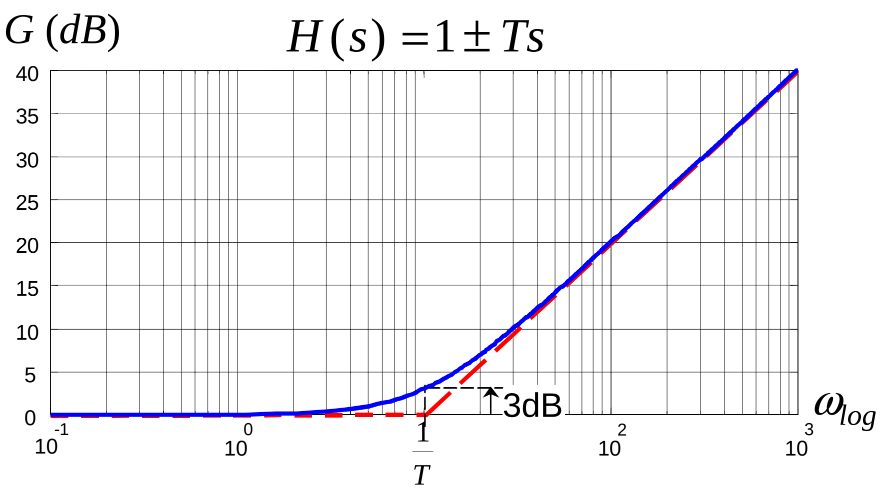
    $\left.\right\}$ asymptotes *horizontales*
    - A $\omega = \omega_c$, on a $\varphi = \frac{\pi}{4}$

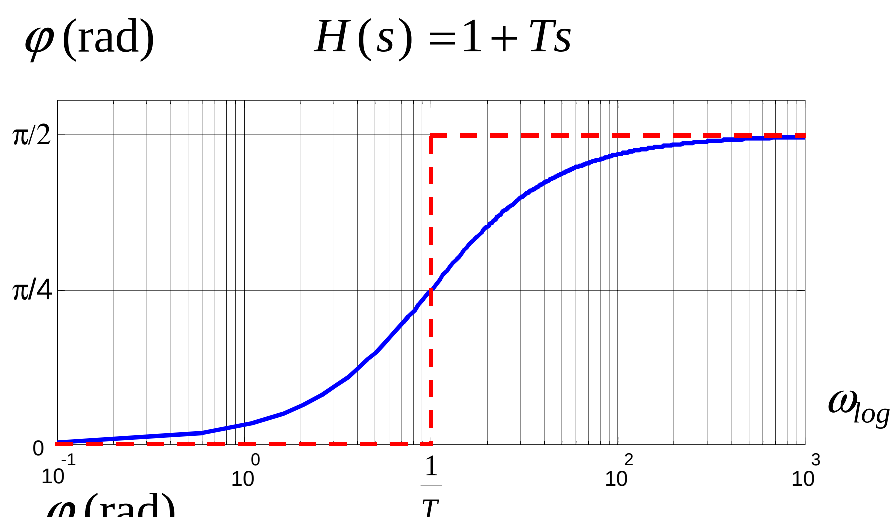
Lieu de Bode des systèmes élémentaires (4)

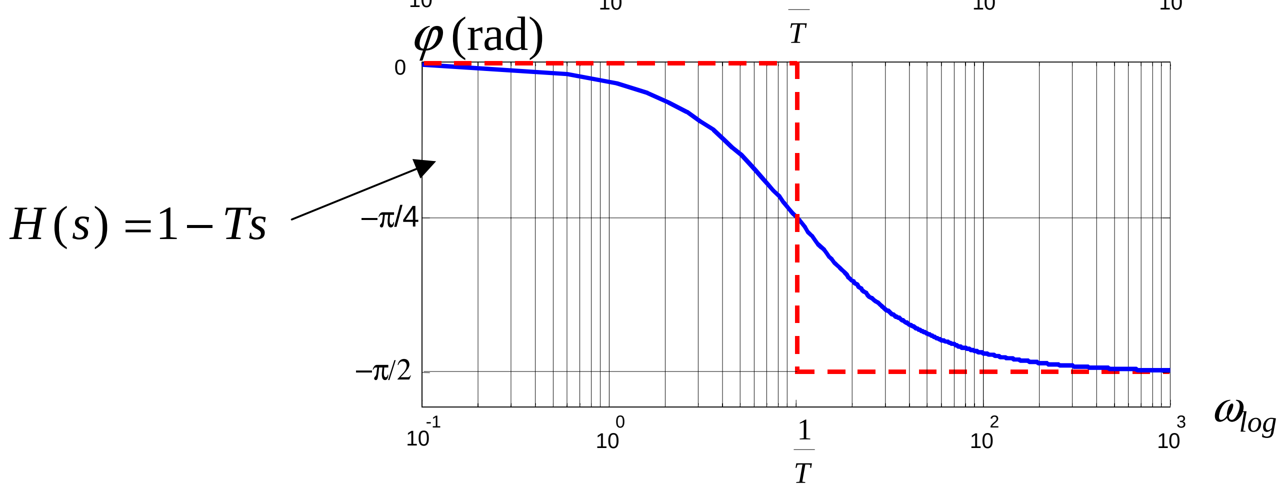
❑ Premier ordre $H(s) = 1 - Ts \quad (T > 0)$

$$G = 10\log_{10}\left(1 + \omega^2 T^2\right) \quad \text{mais} \quad \varphi = -\arctan(\omega T)$$

La phase change de signe par rapport au cas précédent $1+Ts$







Lieu de Bode des systèmes élémentaires (5)

- Premier ordre $H(s) = (1+Ts)^{-1} \quad (T > 0)$

  - Gain $G = -10\log_{10}\left(1+\omega^2 T^2\right)$

    - $\omega T << 1,\ G \approx 0$

      asymptote *horizontale*

    - $\omega T >> 1,\ G \approx -20\log_{10}\omega T$

      asymptote de *pente -1*

    Les deux asymptotes se coupent en $\omega_c = \dfrac{1}{T}$

    - A $\omega = \omega_c$, on a $G = -3\text{dB}$. ω_c pulsation de coupure à 3dB

  - Phase $\varphi = -\arctan(\omega T)$

    $$\left.\begin{array}{l} \omega T << 1,\ \varphi \approx 0 \\ \omega T >> 1,\ \varphi \approx -\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{asymptotes } \textit{horizontales}$$

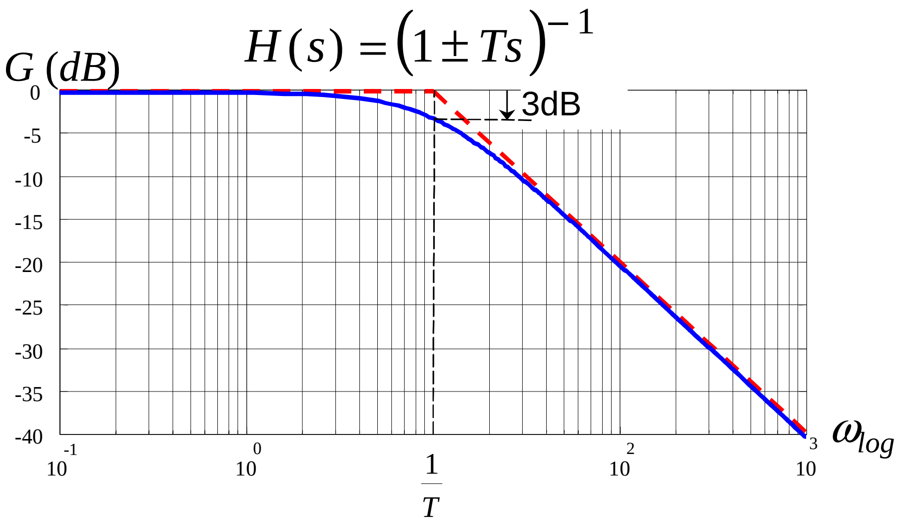
    - A $\omega = \omega_c$, on a $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$

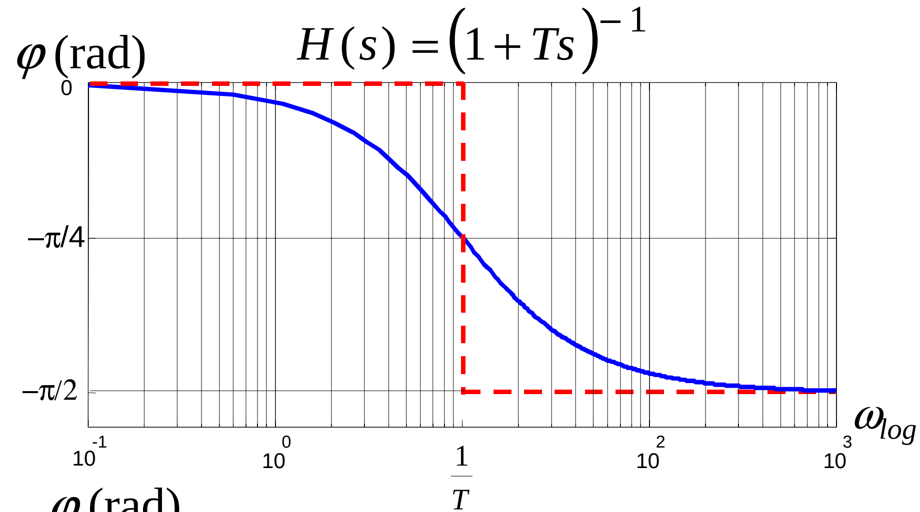
Lieu de Bode des systèmes élémentaires (6)

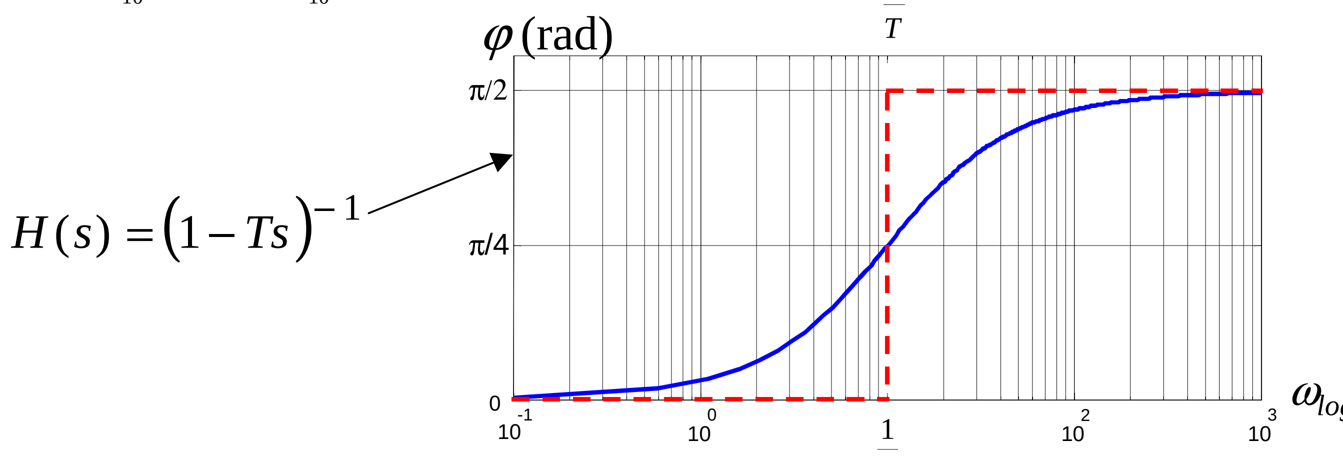
- Premier ordre $H(s)=(1-Ts)^{-1} \quad (T>0)$

$$G=-10\log_{10}\left(1+\omega^2T^2\right) \text{ mais } \quad \varphi=\arctan(\omega T)$$

La phase change de signe par rapport au cas précédent $(1+Ts)^{-1}$







Lieu de Bode des systèmes élémentaires (7)

Rappels

- On appelle pulsation de coupure, la pulsation pour laquelle le gain a diminué de 3dB par rapport à sa valeur maximale. On définit de la même manière la pulsation de coupure à 6dB.
- On appelle bande passante, l'intervalle de pulsations pour lequel le gain ne diminue pas de plus de 3dB par rapport à sa valeur maximale.

Relation temps-fréquence pour un 1er ordre $H(s)=(1+Ts)^{-1}$

- Un système du 1er ordre est un filtre passe-bas
- Sa pulsation de coupure est $\omega_c = \dfrac{1}{T}$, soit $f_c = \dfrac{1}{2\pi T}$
- Bande passante $\mathrm{BP}=[0,\ \omega_c]$
- $t_m f_c \approx 0.35$ avec t_m le temps de montée (t_m=2,2T)

$\Rightarrow$ On augmente la rapidité du système en élargissant sa bande passante

Lieu de Bode des systèmes élémentaires (8)

- Deuxième ordre $H(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (0 < \xi < 1)$

  - Gain

$$G(\omega) = -10\log_{10}\left((\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\omega_n^2\right) + 40\log_{10}\omega_n$$

- $\omega << \omega_n, \; G \approx 0$

  asymptote *horizontale*

- $\omega >> \omega_n, \; G \approx -40\log_{10}\dfrac{\omega}{\omega_n}$

  asymptote de *pente -2*

Les asymptotes se coupent en ω_n

- $\omega = \omega_n, \; G = -20\log_{10}(2\xi)$

On remarque que pour de faibles valeurs de ξ, le gain peut être très supérieur à 0dB. L'amplitude du gain passera par un maximum (*phénomène de résonance*) pour la pulsation ω telle que $G'(\omega) = 0$

Lieu de Bode des systèmes élémentaires (9)

Deuxième ordre en dénominateur (suite)

On montre que la résonance se produit pour $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$

- Pulsation de résonance $\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$
- Facteur de résonance $Q = \left| H(j\omega_R) \right| = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

Si $\xi \to 0$, alors $\omega_R \to \omega_n$ et $Q \to \infty$

ξ faible $\Rightarrow$ grande résonance

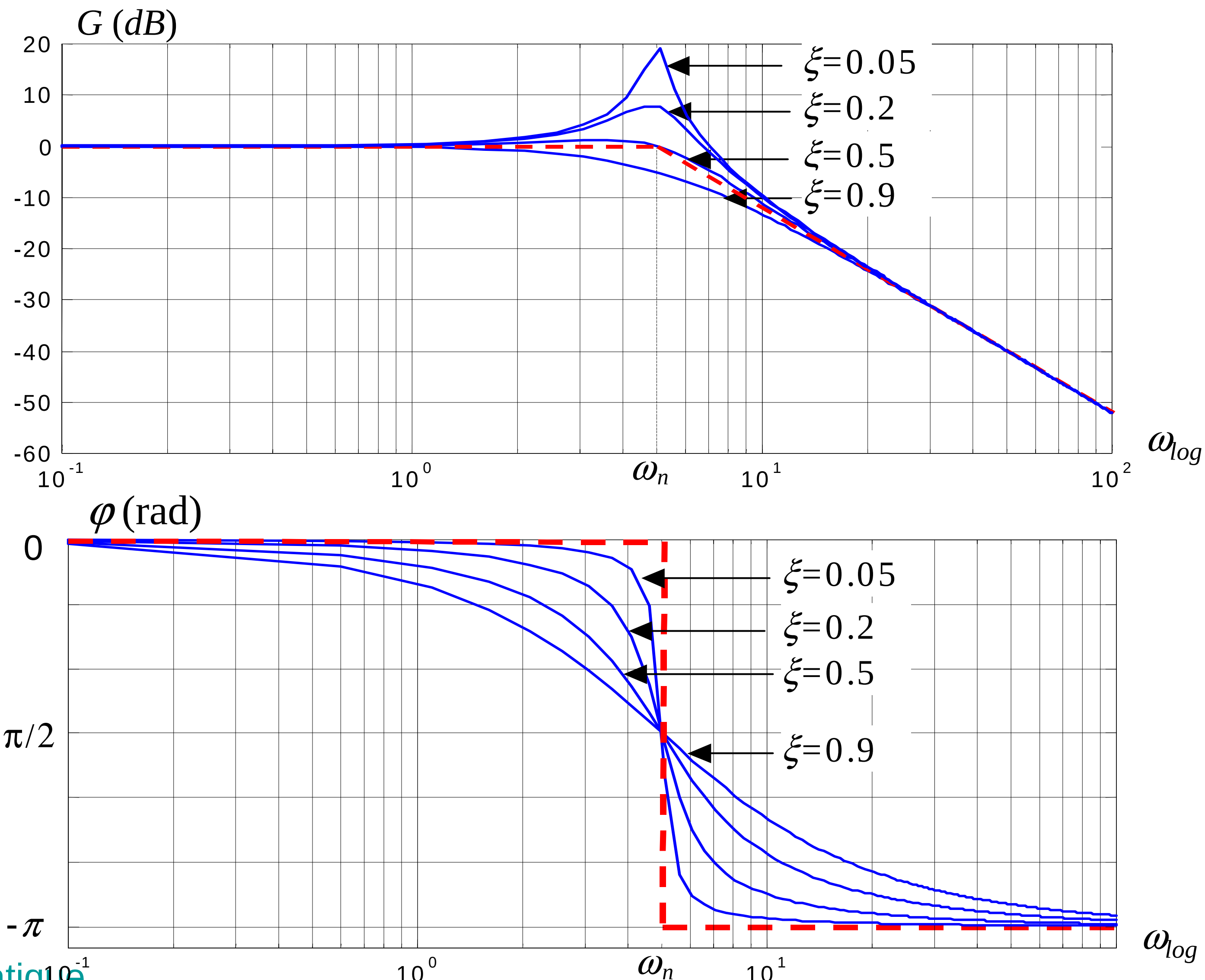
- Phase $\varphi = -\arctan\left(\dfrac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \omega << \omega_n,\ \varphi \approx 0 \\ \omega >> \omega_n,\ \varphi \approx -\pi \end{array}\right\} \text{asymptotes } \textit{horizontales}$$

- $\omega = \omega_n,\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$
- $\omega = \omega_R,\ \varphi \approx -\dfrac{\pi}{2} + \arcsin \dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

Lieu de Bode des systèmes élémentaires (10)

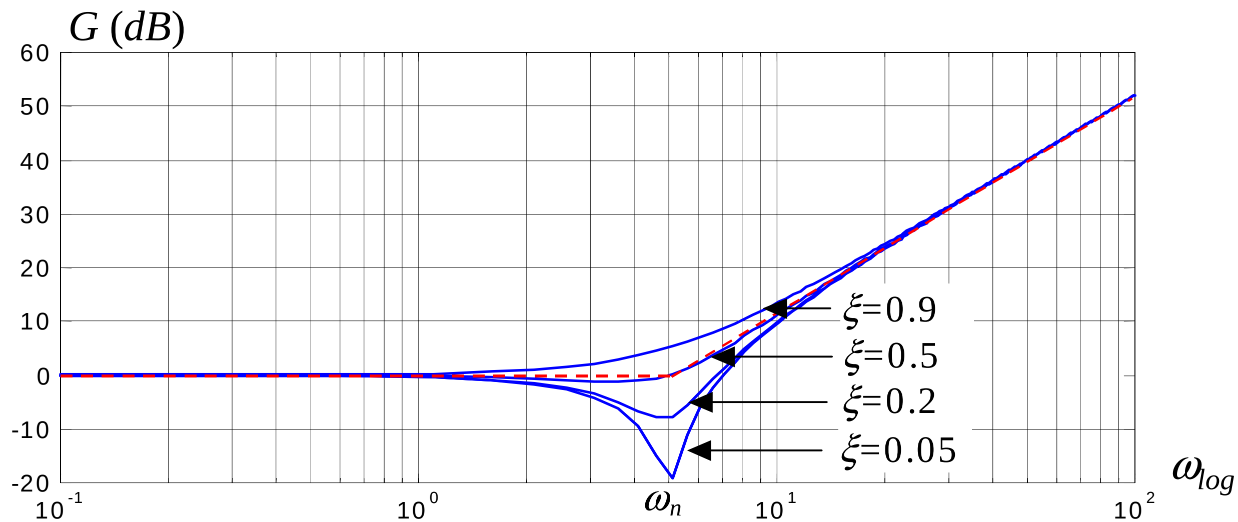
Deuxième ordre en dénominateur (fin)

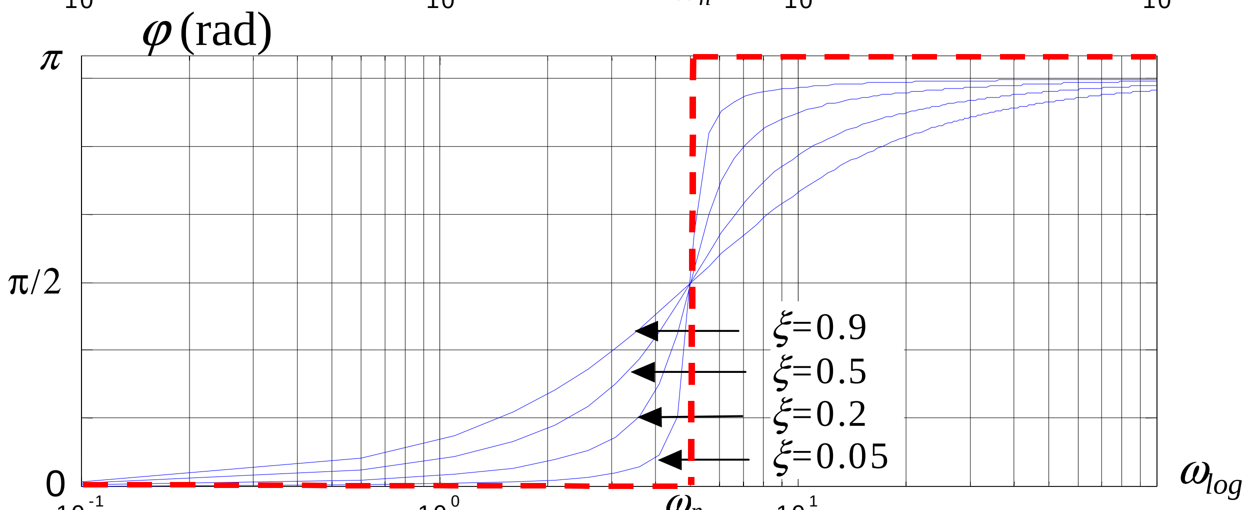


Lieu de Bode des systèmes élémentaires (11)

- Deuxième ordre en numérateur $H(s) = \dfrac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2} \quad (0 < \xi < 1)$

Le gain et la phase changent de signe par rapport au cas précédent

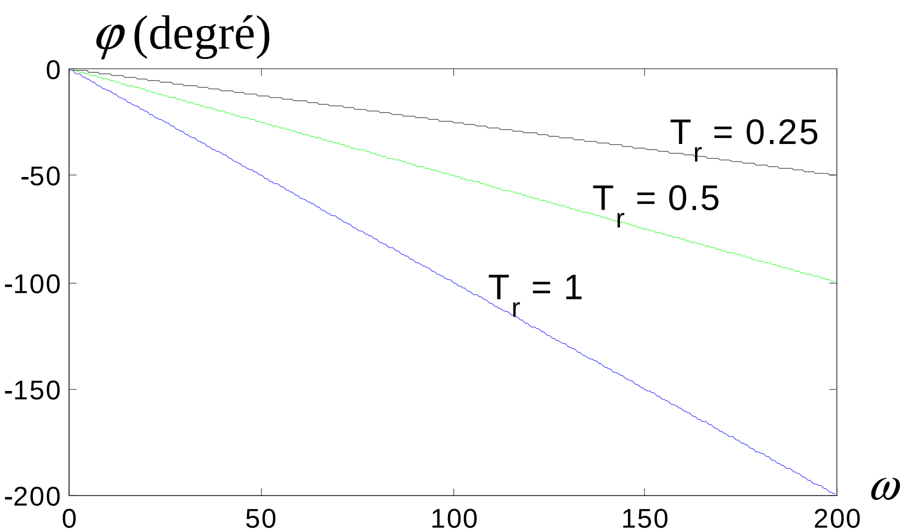


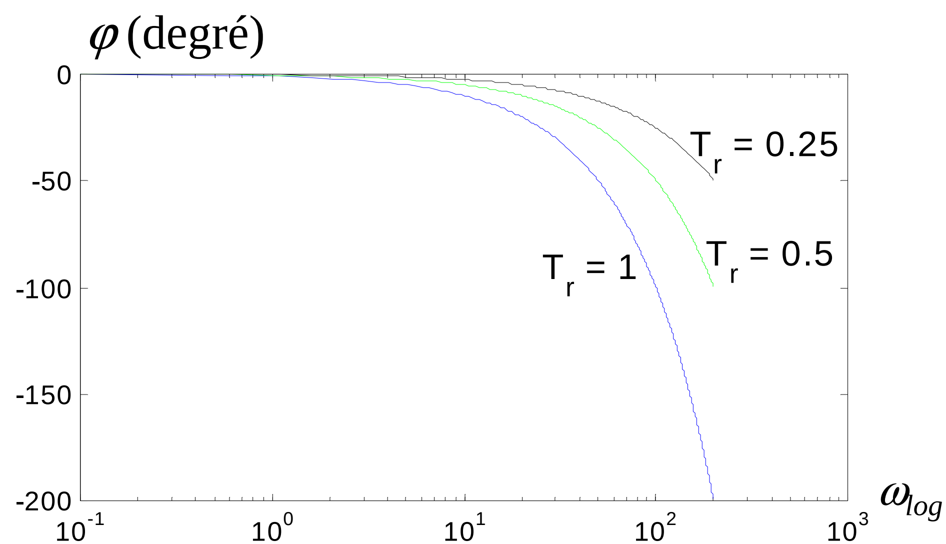


Lieu de Bode des systèmes élémentaires (12)

- Retard $H(s) = e^{-T_r s}$
  - Gain $G = 0\mathrm{dB}$
  - Phase $\varphi = -\omega T_r$

Le retard ne modifie pas le diagramme de gain. La phase décroît selon une droite de pente $-T_r$.





Règles de tracé pratique du lieu de Bode (1)

Ces règles permettent de tracer les diagrammes asymptotiques de gain et de phase du lieu de Bode

❑ Etape préliminaire

- Ecrire la fonction de transfert $H(s)$ sous la forme normalisée

$$H(s) = Ks^{\alpha}\prod_i (1+T_i s)^{\beta_i}\prod_l\left(\frac{s^2}{\omega_{n,l}^2}+\frac{2\xi_l}{\omega_{n,l}}s+1\right)^{\gamma_l}$$

$\xi \in [0\;1[,\ \omega_{n,l} > 0,$

$K, T_i \in \mathbb{R}^*$

$\alpha, \beta_i, \gamma_l \in \mathbb{Z}$

- Classer les pulsations de coupure $\frac{1}{T_i}$ et les pulsations propres $\omega_{n,\,l}$ par ordre croissant

❑ Tracé du diagramme asymptotique de gain

- Si α=0, on démarre avec une asymptote horizontale G=20log$_{10}$|K|
  Si $\alpha \neq 0$, on démarre avec une asymptote de pente α ($\alpha \in \mathbb{Z}$) et qui passe par le point (ω=1, G=20log$_{10}$|K|)

NB : pente $\alpha \Leftrightarrow$ pente α20dB/décade

Règles de tracé pratique du lieu de Bode (2)

- A chaque pulsation $1/T_i$, on modifie la pente de l'asymptote de β_i ($\beta_i \in \mathbb{Z}$)
- A chaque pulsation $\omega_{n,\,l}$, on modifie la pente de l'asymptote de $2\gamma_l$ ($\gamma_l \in \mathbb{Z}$)

Tracé du diagramme asymptotique de phase

- Si $\alpha=0$, on démarre avec une asymptote $\varphi = \dfrac{\mathrm{sgn}(K)-1}{2}\pi$

  Si $\alpha \neq 0$, on démarre avec une asymptote $\varphi = \dfrac{\mathrm{sgn}(K)-1+\alpha}{2}\pi$
- A chaque pulsation $1/T_i$, ajouter à l'asymptote $\beta_i\, \pi/2$ ($\beta_i \in \mathbb{Z}$)
- A chaque pulsation $\omega_{n,\,l}$, ajouter à l'asymptote $\gamma_l\, \pi$ ($\gamma_l \in \mathbb{Z}$)

Exemple de tracé de lieu de Bode (1)

Exemple 1

Tracer le diagramme de Bode du système $H(s) = \dfrac{K}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$

avec $K > 0, T_1 > T_2 > 0$

Exemple de tracé de lieu de Bode (2)

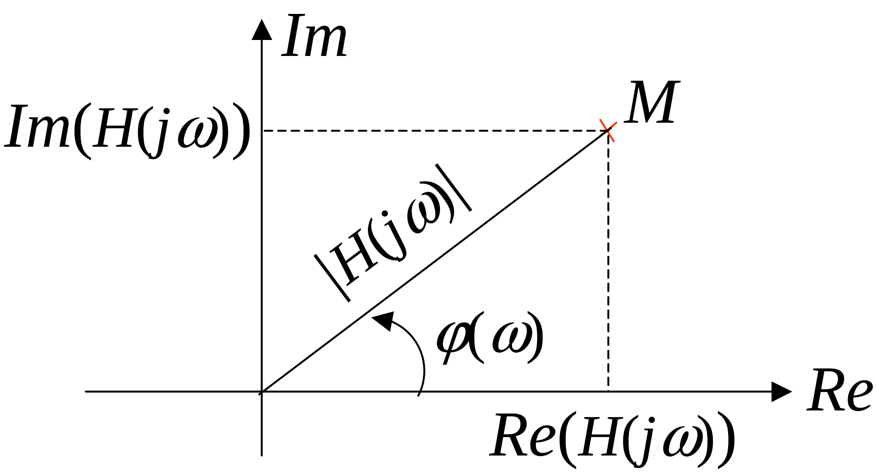
Exemple 2

Tracer le diagramme de Bode du système $H(s) = \dfrac{k(1+3s)}{(1+s)(s^2+s+4)}$

Lieu de Nyquist (1)

Définition

Le lieu de Nyquist est le lieu en coordonnées polaires des points d'affixe $H(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à +∞. Le diagramme de Nyquist est gradué avec les valeurs de ω.



Soit le point M associé à $H(j\omega)$

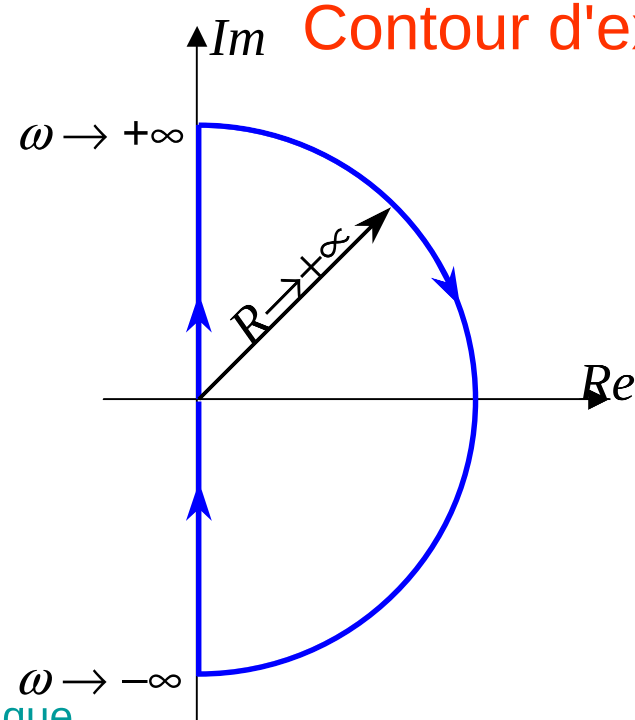
$$M\ (|H(j\omega)|, \arg(H(j\omega)))$$

Le diagramme de Nyquist (lieu complet) correspond à ω variant de -∞ à +∞. Il s'obtient par symétrie par rapport à l'axe réel du lieu de Nyquist.

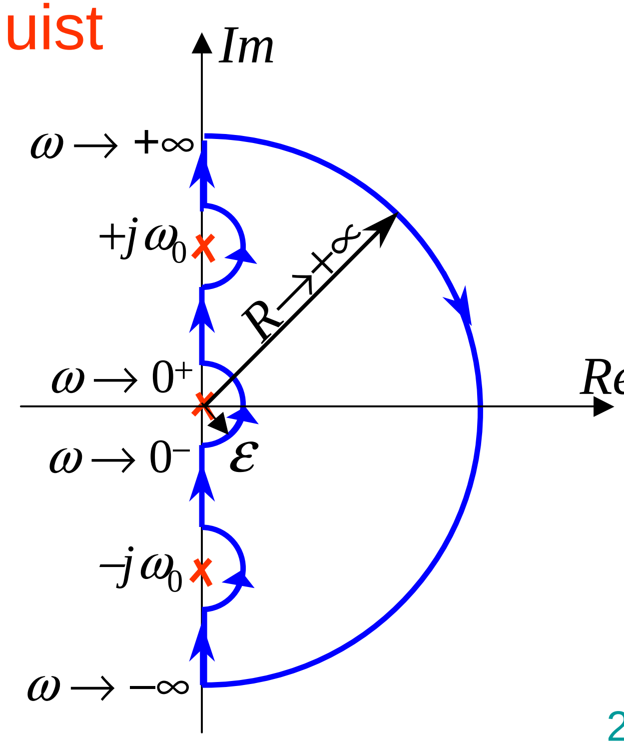
Lieu de Nyquist (2)

Définition

Le diagramme de Nyquist est l'image par $H(s)$ du *contour fermé* appelé *contour d'exclusion de Nyquist*. Ce contour entoure tous les pôles et zéros de $H(s)$ à partie réelle strictement positive. Si $H(s)$ a des pôles nuls ou imaginaires purs, le contour d'exclusion les évite par des demi-cercles de rayon $\varepsilon \to 0$.

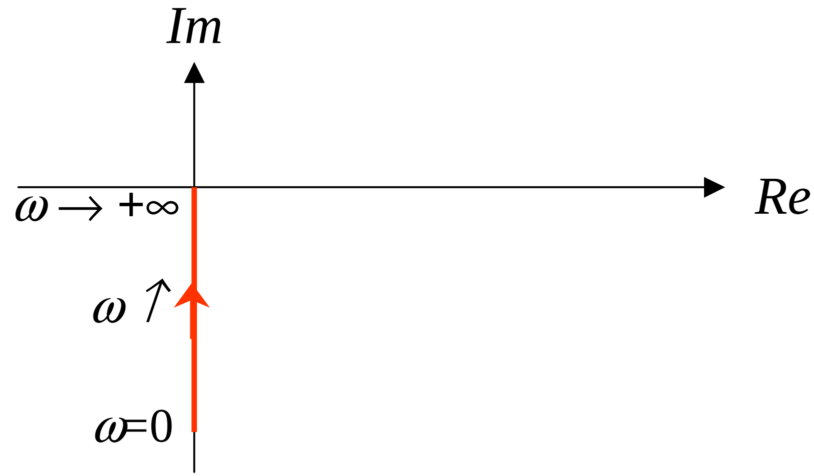


Contour d'exclusion de Nyquist



Lieu de Nyquist des systèmes usuels (1)

- Intégrateur $H(s) = s^{-1}$

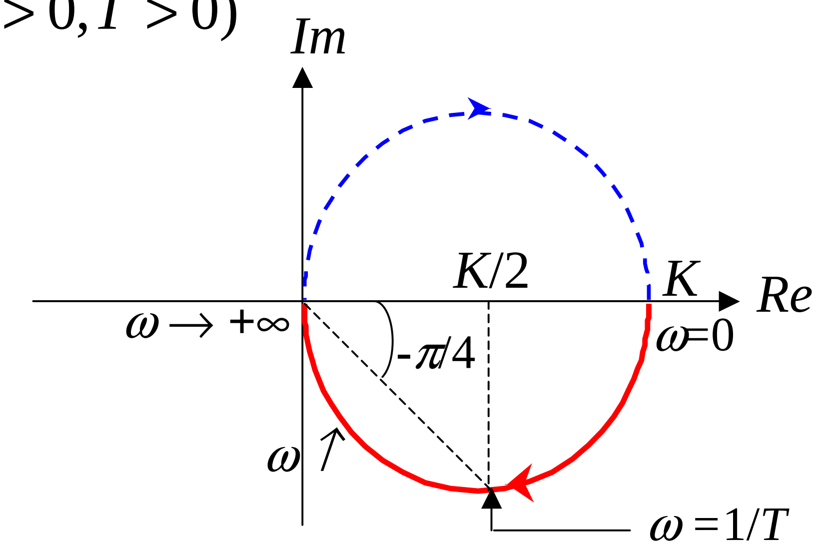


$$\omega \rightarrow 0, \quad |H(j\omega)| \rightarrow +\infty$$

$$\omega \rightarrow +\infty, \quad |H(j\omega)| \rightarrow 0$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \forall \omega \in [0 \quad +\infty[$$

- Premier ordre $H(s) = \dfrac{K}{1+Ts} \quad (K > 0, T > 0)$



$$\omega = 0, \quad |H(j\omega)| = K \text{ et } \varphi = 0$$

$$\omega = \frac{1}{T}, \quad |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}} \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad |H(j\omega)| = 0 \text{ et } \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

Le lieu de Nyquist est un demi-cercle de rayon $K/2$ et de centre $(K/2, 0)$

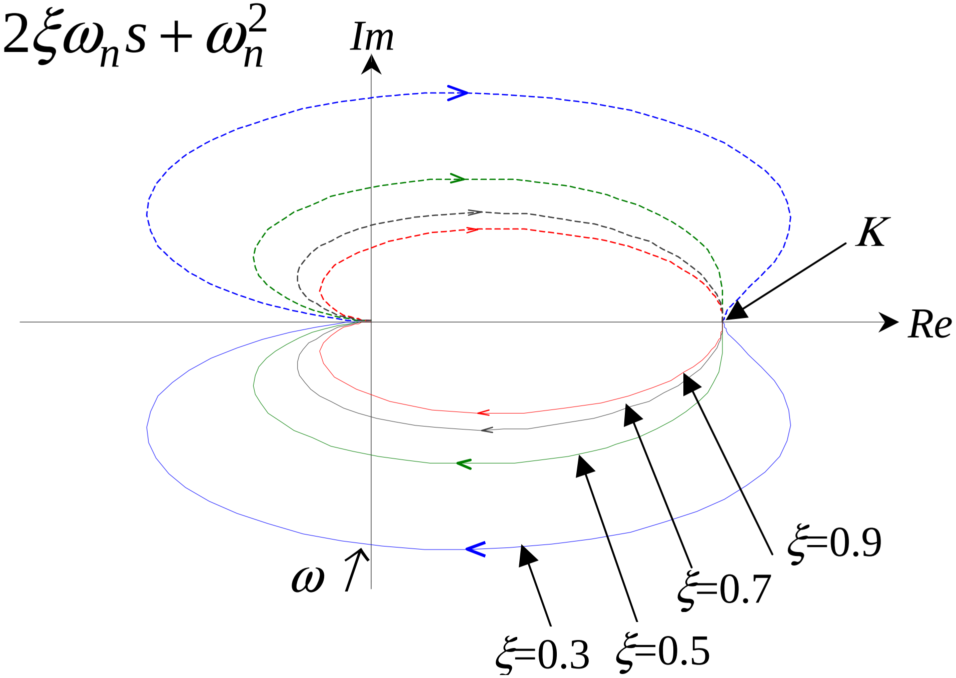
Lieu de Nyquist des systèmes usuels (2)

- Deuxième ordre $H(s) = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

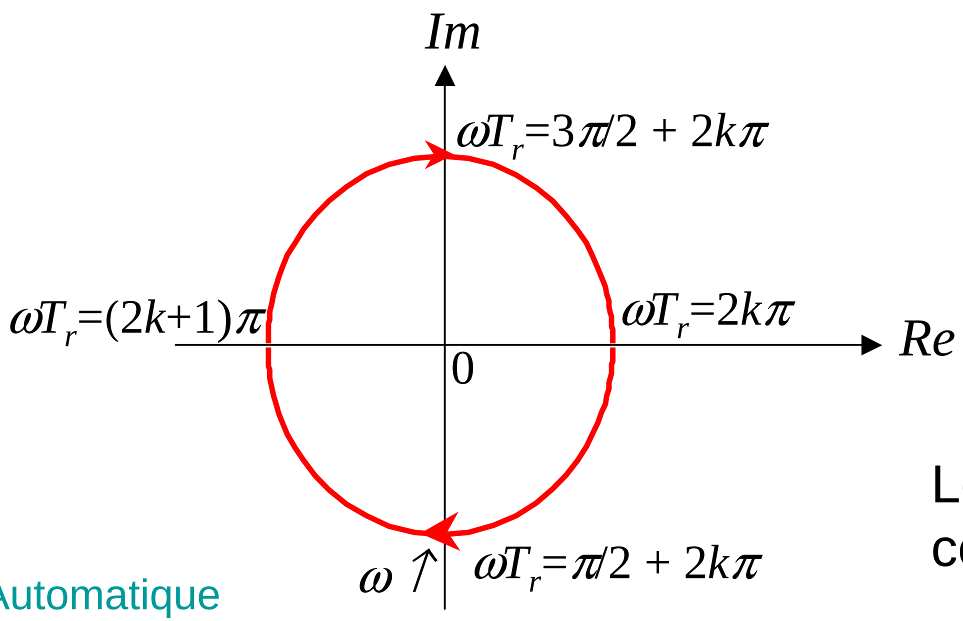
$$\omega = 0 \quad |H(j\omega)| = K \text{ et } \varphi = 0$$

$$\omega = \omega_n \quad |H(j\omega)| = 2\xi \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega \to \infty \quad |H(j\omega)| = 0 \text{ et } \varphi = -\pi$$



- Retard pur $H(s) = e^{-T_r s}$



Le lieu de Nyquist est un cercle centré en 0 et de rayon unité

Exemple de tracé de lieu de Nyquist

Tracer le diagramme de Nyquist du système $H(s) = \dfrac{K}{s(1+Ts)}$

avec $K > 0, T > 0$

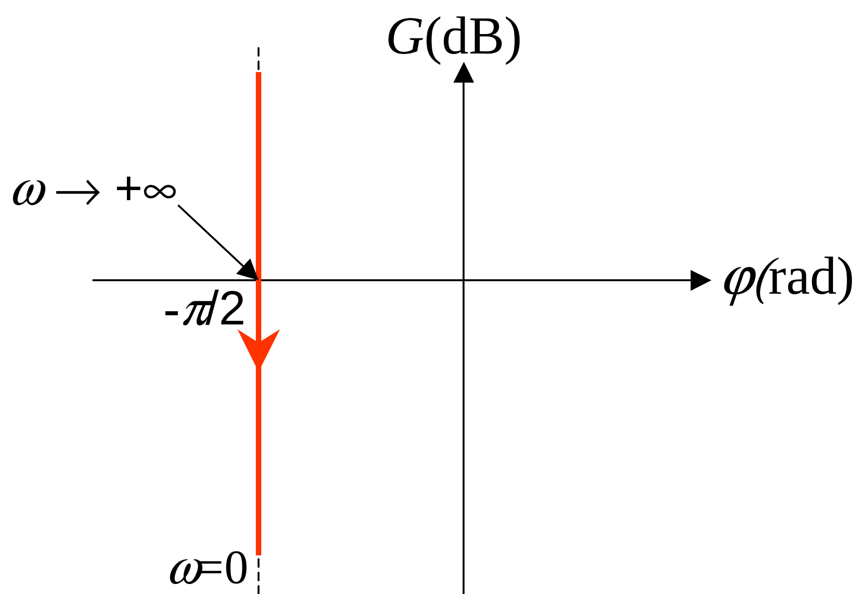
Lieu de Black (1)

❑ Définition

Le lieu de Black est la représentation cartésienne de $H(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$. Le lieu de Black est gradué avec les valeurs du paramètre ω.

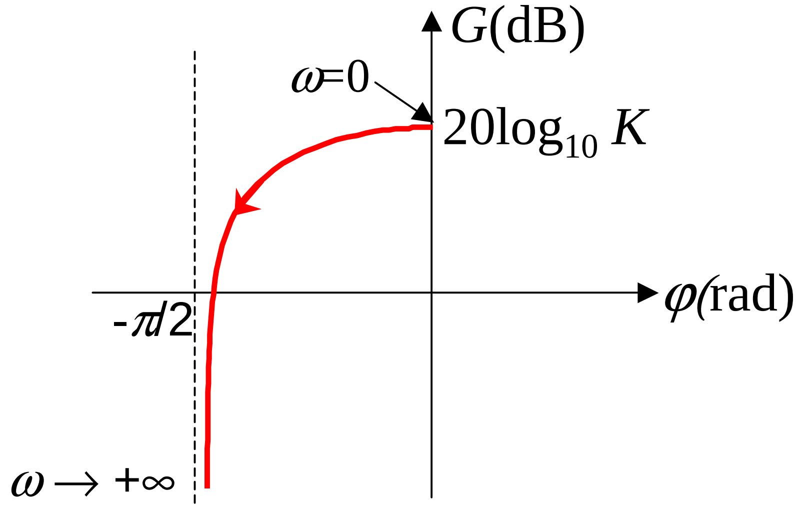
- Abscisse : la phase en degré ou radian
- Ordonnée : le gain en décibel (dB)

❑ Lieu de Black d'un intégrateur $H(s) = s^{-1}$

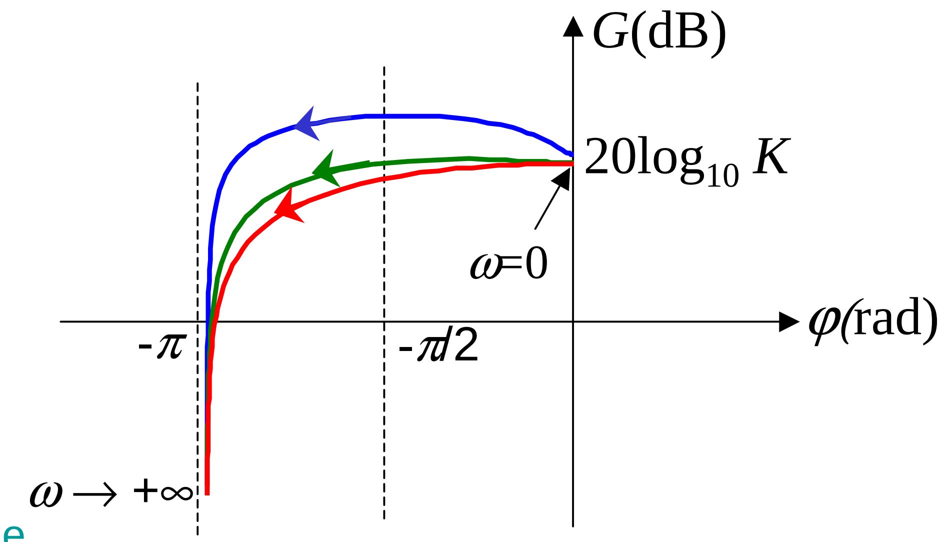


Lieu de Black (2)

- Lieu de Black d'un 1er ordre $H(s)=\dfrac{K}{1+Ts}$ $(K>0, T>0)$



- Lieu de Black d'un 2e ordre $H(s)=\dfrac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

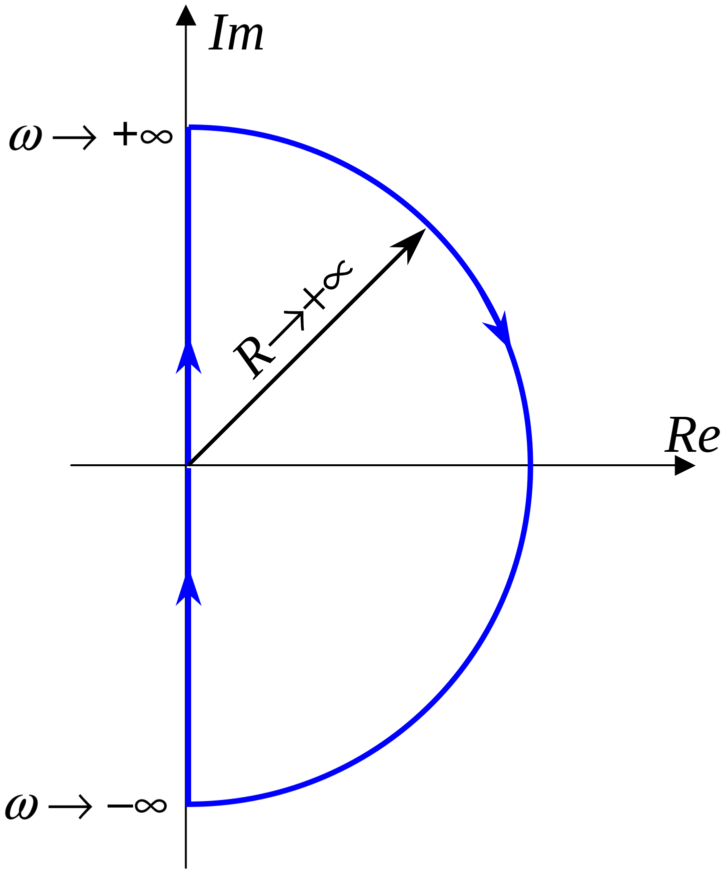


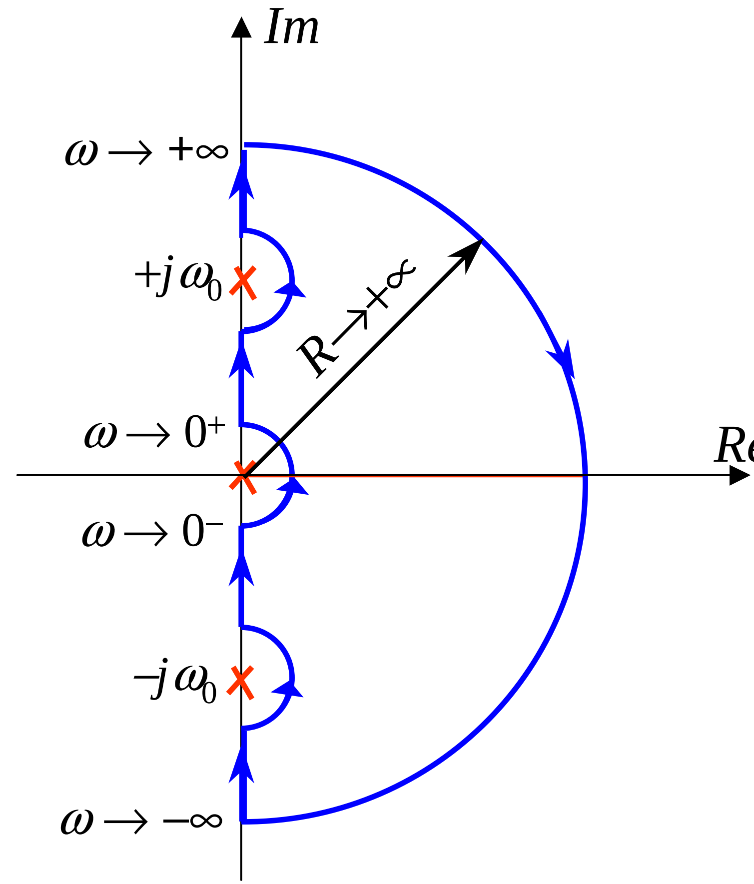
Lieu de Black (3)

- Exemple

Tracer le diagramme de Black du système $H(s) = \dfrac{K}{s(1+Ts)}$

avec $K > 0, T > 0$


Im
Re
$\omega \to +\infty$
$\omega \to -\infty$
$R \to +\infty$


Im
Re
$\omega \to +\infty$
$+j\omega_0$
$R \to +\infty$
$\omega \to 0^+$
$\omega \to 0^-$
$-j\omega_0$
$\omega \to -\infty$