ICAM - TOULOUSE — DÉPARTEMENT GEI
GEA-REGUL — YASSINE ARIBA

Note et exemples sur le tracé asymptotique du diagramme de Bode

Cette note présente une méthodologie pratique pour le tracé asymptotique du diagramme de Bode d'une fonction de transfert. Cette note peut sembler inutile puisque le diagramme de Bode est généralement tracé à l'aide de logiciels de calculs scientifiques tels que MATLAB® ou SCILAB. Toutefois, il reste nécessaire de connaître quelques règles de construction du diagramme pour pouvoir analyser l'influence de modifications des pôles/zéros d'une fonction sur le tracé de Bode correspondant. Ces notions sont particulièrement utiles lors de la synthèse de correcteurs.

1 Introduction

Nous rappelons que la réponse fréquentielle, ou harmonique, est la réponse d'un système à des entrées sinusoïdales de fréquences données. Dans le cas des systèmes linéaires invariants, la réponse à un signal d'entrée de la forme

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t)$$

est un signal de sortie de la forme

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

C'est-à-dire que la réponse d'un système linaire invariant à une sinusoïde est une sinusoïde de même fréquence[1] mais d'amplitude et de phase différentes. Comme le montre la Figure 2, la réponse harmonique est caractérisée par

- son gain : $\dfrac{y_0}{u_0}$ (rapport des amplitudes),
- son déphasage : $\pm 360\dfrac{d}{T}$ (décalage temporel par rapport à la période).

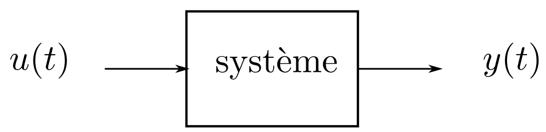


FIGURE 1

Pour une fonction de transfert donnée, le gain y_0/u_0 (amplification/atténuation de l'amplitude) et le déphasage φ dépendent de la fréquence de la sinusoïde. Par exemple, considérons la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{0.5}{s+1}. \tag{1}$$

Nous excitons ce système avec trois signaux d'entrée :

$$u_1 = \sin(0.05\,t)$$
$$u_2 = \sin(1.5\,t)$$
$$u_3 = \sin(10\,t)$$

1. En fait, ω est la pulsation en rad/s, la fréquence est donnée par $f = \frac{\omega}{2\pi}$ en s^{-1}. Cependant, les dénominations seront souvent confondues.

Les trois réponses correspondantes sont données sur la Figure 3.

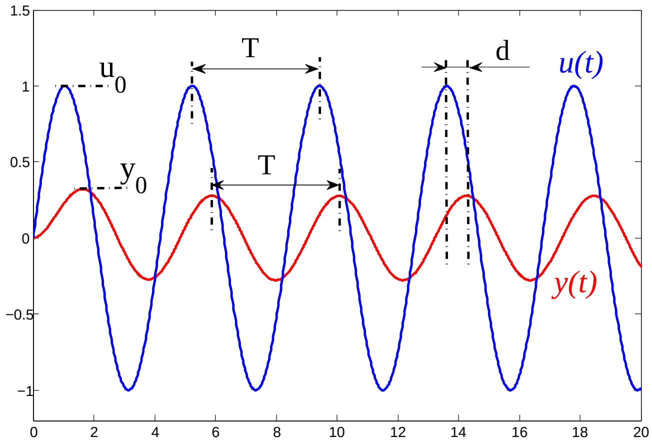


FIGURE 2

Sur cet exemple, nous pouvons constater que plus la pulsation est importante, plus l'atténuation et le déphasage du signal sont importants. Le diagramme de Bode est une représentation graphique du gain et du déphasage d'une fonction de transfert. Il est constitué de deux graphes :

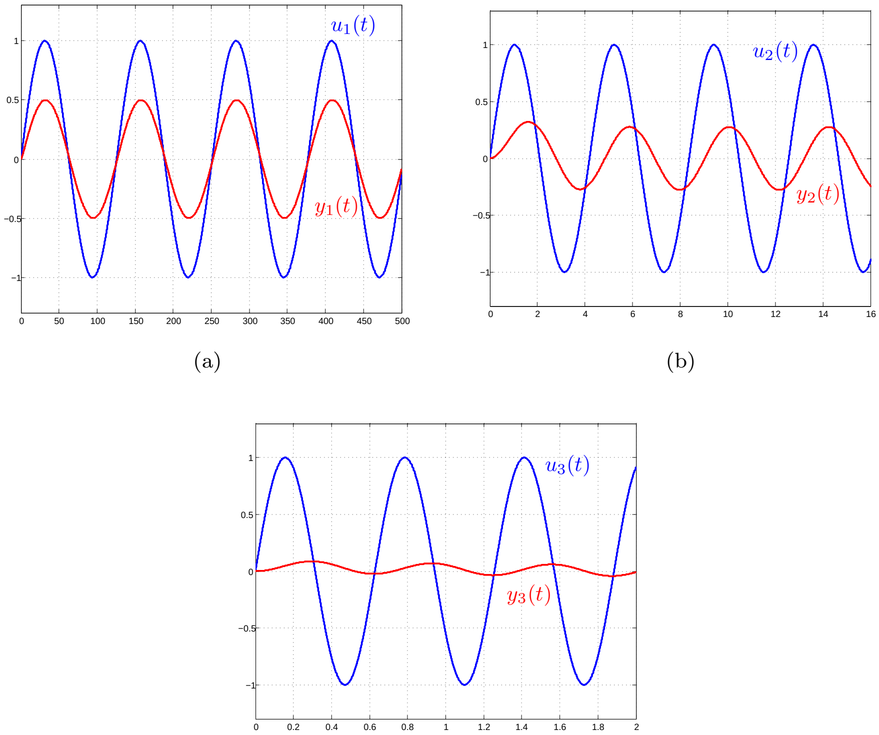
- le tracé du gain en fonction de la pulsation ω. Le gain est conventionnellement représenté en décibel : $20 \log \frac{y_0}{u_0}$. Ainsi, un gain supérieur à 1 (amplification) correspond à un gain en décibel positif tandis qu'un gain inférieur à 1 (atténuation) correspond à un gain en décibel négatif.
- le tracé du déphasage en fonction de la pulsation ω. Le déphasage est en *rad* ou en *deg*.

Pour les deux graphiques, l'échelle des pulsations en abscisse est logarithmique. La Figure 4 montre le diagramme de Bode de la fonction de transfert (1). Nous retrouvons le fait que le gain diminue lorsque ω augmente. Le déphasage varie quant à lui de 0 à -90 *deg*. Pour une pulsation donnée, le diagramme renseigne l'amplification et le déphasage induits par le système. A partir de la Figure 3, nous pouvons mesurer

- pour $\omega = 0.05$: un gain de $0.5/1$, soit -6 décibel, et un déphasage très faible,
- pour $\omega = 1.5$: un gain de $0.27/1$, soit -11.2 décibel, et un déphasage de $-360 \times 0.65/4.2 \simeq -56$ *deg*.

Ces valeurs sont bien évidemment retrouvées sur le diagramme de la Figure 4 aux pulsations correspondantes.

> Pour une fonction de transfert $G(s)$ donnée, on montre que :
>
> – son gain est égal à $|G(j\omega)|$, soit $20 \log |G(j\omega)|$ en décibel,
>
> – son déphasage est égal à $\arg\big[G(j\omega)\big]$.
>
> $G(j\omega)$ est obtenue en remplaçant la variable de Laplace s par $j\omega$.



(a) (b)

(c)

FIGURE 3: *Réponse de (1) à une sinusoïde pour différentes pulsations - (a)* $\omega = 0.05$ *; (b)* $\omega = 1.5$ *; (c)* $\omega = 10$*.*

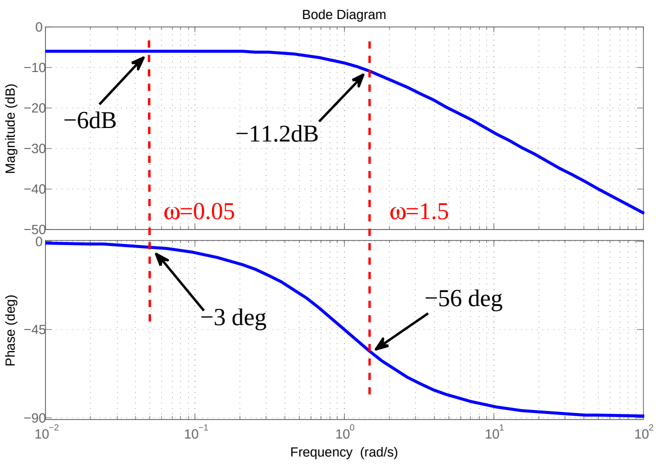


FIGURE 4

2 Tracés élémentaires

Dans le cours, nous avons démontré comment obtenir le diagramme de Bode d'un ensemble de fonctions de transfert de base :

$$\begin{array}{rclll} G(s) & = & k & \text{avec } k > 0 & \text{(gain constant)} \\ G(s) & = & \dfrac{1}{s} & & \text{(intégrateur)} \\ G(s) & = & s & & \text{(dérivateur)} \\ G(s) & = & \dfrac{1}{\tau s + 1} & \text{avec } \tau > 0 & \text{(pôle, premier ordre)} \\ G(s) & = & \tau s + 1 & \text{avec } \tau > 0 & \text{(zéro, premier ordre au numérateur)} \end{array}$$

Les diagrammes asymptotiques correspondants sont rappelés sur la Figure 5. Nous insistons sur le fait que nous représentons ici seulement les courbes asymptotiques et non les courbes exactes. Remarquons que, sur le diagramme 5a pour une fonction de type gain constant, nous avons représenté ici le cas où $k > 1$. Pour $1 > k > 0$, la valeur $20 \log k$ serait négative et la droite en-dessous de l'axe des abscisses. Sur les diagrammes 5d et 5e, la pulsation $1/\tau$ pour laquelle il y a un changement de pente sur la courbe de gain est appelée la *pulsation de cassure*.

Nous avons vu que le gain était calculé à partir de la fonction log et le déphasage à partir de la fonction arg. Ces deux fonctions mathématiques présentent les propriétés suivantes :

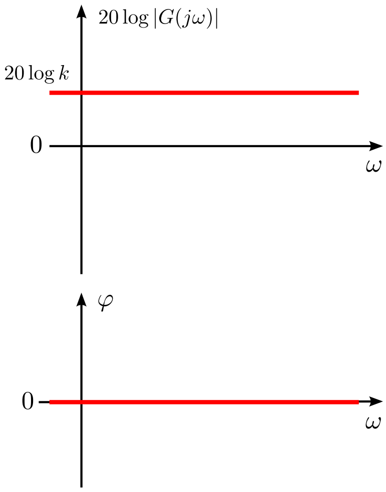
$$\begin{array}{rclrcl} \log(a\,b) & = & \log a + \log b & \arg(z_1\,z_2) & = & \arg z_1 + \arg z_2 \\ \log\left(\dfrac{a}{b}\right) & = & \log a - \log b & \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) & = & \arg z_1 - \arg z_2 \\ \log(a^n) & = & n\,\log a & \arg(z^n) & = & n\,\arg z \end{array}$$

Cela signifie que le gain et le déphasage du produit de deux fonctions de transfert sont les sommes des gains et déphasages des deux mêmes fonctions prises individuellement :

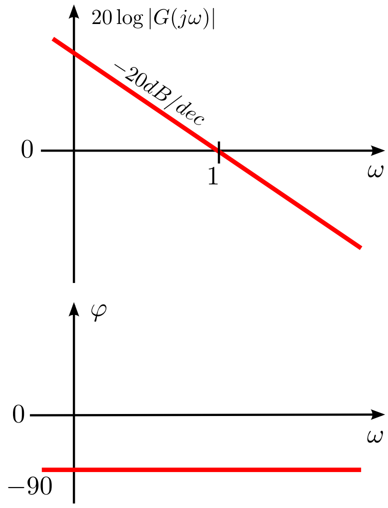
$$G(s) = G_1(s)\,G_2(s) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 20 \log |G(j\omega)| & = & 20 \log |G_1(j\omega)| + 20 \log |G_2(j\omega)| \\ \arg G(j\omega) & = & \arg G_1(j\omega) + \arg G_2(j\omega) \end{array} \right.$$

Ainsi, en décomposant une fonction de transfert quelconque en un produit de fonctions de transfert élémentaires, le diagramme de Bode asymptotique est obtenu en sommant les tracés élémentaires correspondants.

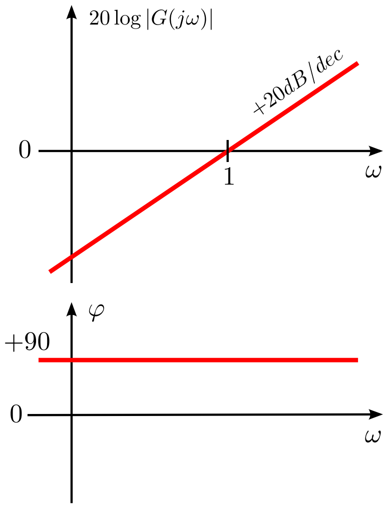
Notons que, dans ce document, nous ne considérons pas le cas où τ est négatif et le cas des fonctions de transfert du second ordre avec des pôles (ou zéros) complexes conjugués.



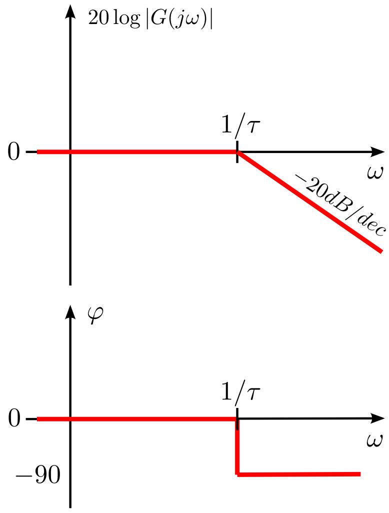
(a) *Gain constant* $G(s) = k$



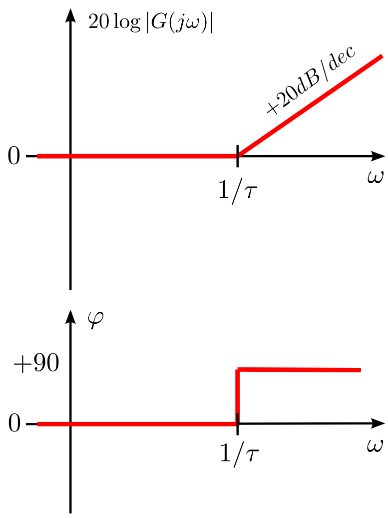
(b) *Intégrateur* $G(s) = \frac{1}{s}$



(c) *Dérivateur* $G(s) = s$



(d) *Premier ordre* $G(s) = \frac{1}{\tau s+1}$



(e) *Zéro* $G(s) = \tau s + 1$

FIGURE 5: *Diagrammes de Bode des fonctions élémentaires.*

3 Exemples

Exemple 1

Considérons la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(0.5s+1)}. \tag{2}$$

Celle-ci est le produit de deux fonctions de transfert du premier ordre

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \times \frac{1}{0.5s+1}.$$

Le diagramme de Bode asymptotique de $G(s)$ est donc obtenu en sommant les tracés de $\frac{1}{s+1}$ et $\frac{1}{0.5s+1}$. Son tracé est donné sur la Figure 6.

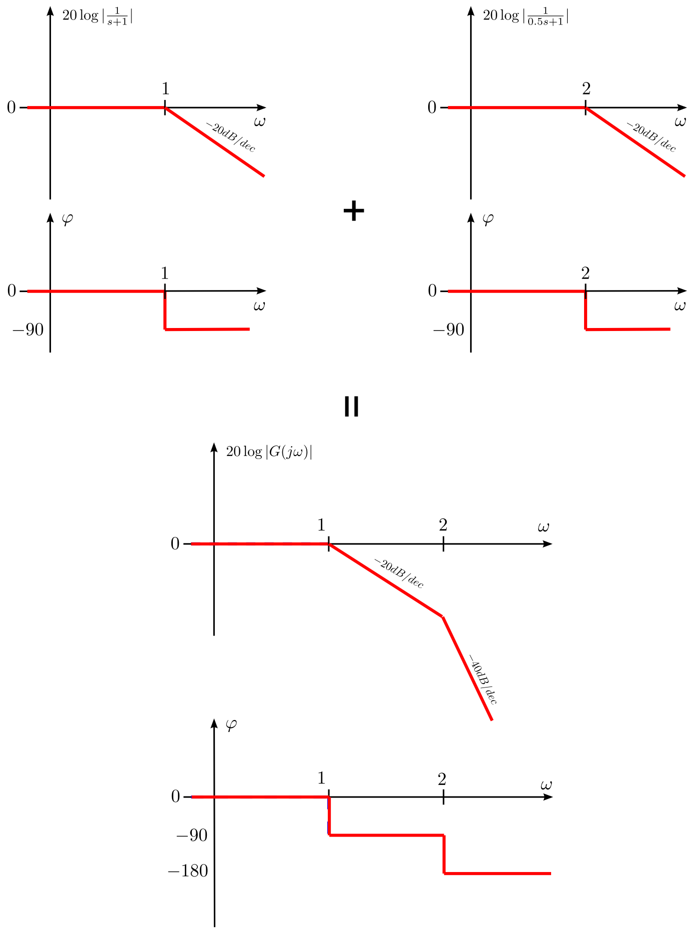


FIGURE 6: *Diagramme de Bode de la fonction (2).*

Exemple 2

Considérons la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{s+10}{s+1}. \tag{3}$$

Celle-ci est le produit d'une fonction de transfert du premier ordre, d'un zéro et d'un gain

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \times (0.1s+1) \times 10.$$

Afin de réutiliser les tracés de la Figure 5, il convient de faire apparaitre les mêmes "formes" que les fonctions de base. Par exemple, nous utilisons ici une forme en $(as+1)$ plutôt qu'en $(s+a)$. Le diagramme de Bode asymptotique de $H(s)$ est donné sur la Figure 7.

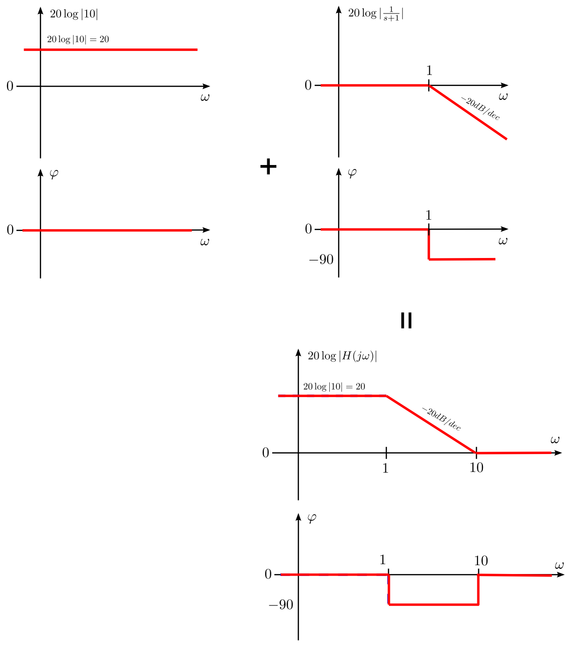


FIGURE 7: *Diagramme de Bode de la fonction (3).*

Exemple 3

Considérons la fonction de transfert

$$K(s) = \frac{2s+1}{s^2+9s+18}. \tag{4}$$

Transformons cette fonction en un produit de fonctions élémentaires connues

$$K(s) = \frac{2s+1}{(s+3)(s+6)} = \frac{2s+1}{18(\frac{1}{3}s+1)(\frac{1}{6}s+1)}$$

$$= \frac{1}{18} \times (2s+1) \times \frac{1}{\frac{1}{3}s+1} \times \frac{1}{\frac{1}{6}s+1}$$

Le diagramme de Bode asymptotique de $K(s)$ est donné sur la Figure 8.

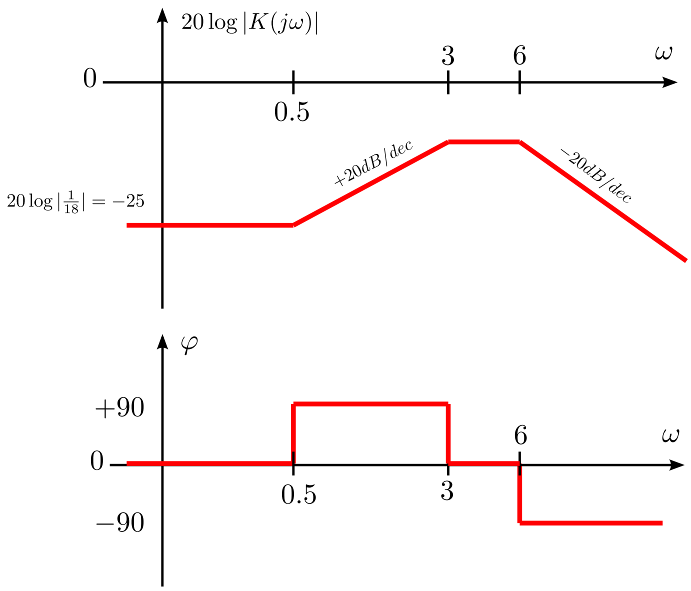


FIGURE 8: *Diagramme de Bode de la fonction (4).*

Exemple 4

Considérons la fonction de transfert

$$L(s) = \frac{1}{s(10s+1)}. \tag{5}$$

Cette fonction correspond à la mise en série d'un premier ordre et d'un intégrateur pur :

$$L(s) = \frac{1}{s} \times \frac{1}{10s+1}$$

Le diagramme de Bode asymptotique de $L(s)$ est donné sur la Figure 9.

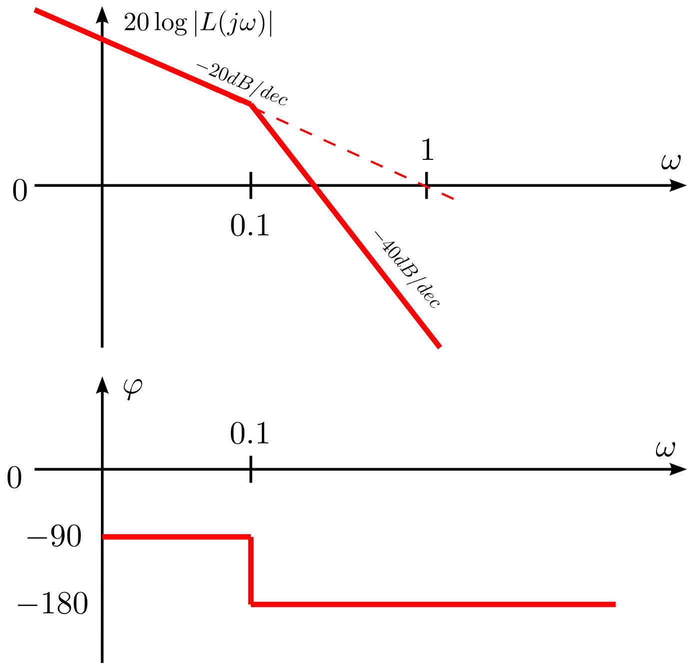


FIGURE 9: *Diagramme de Bode de la fonction (5).*