Etude Fréquentielle du 2nd ordre passe-bande

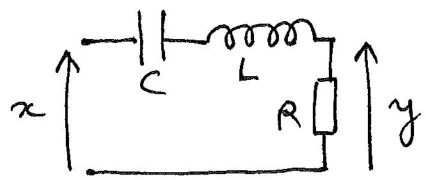
- Forme générale : $\overline{T} = T_0 \dfrac{2m\, j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

  avec ω_0 : pulsation propre du système

  m : coefficient d'amortissement

  $\overline{T}(j\omega_0) = T_0$ réelle et $|T_0| = |\overline{T}|_{max}$

- Exemple :



$T_0 = 1$

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

$m = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

- On étudiera dans la suite $\overline{T}' = \overline{T}/T_0$ et $G = 20 \log |\overline{T}'|$

- <u>Etude directe (m quelconque)</u>

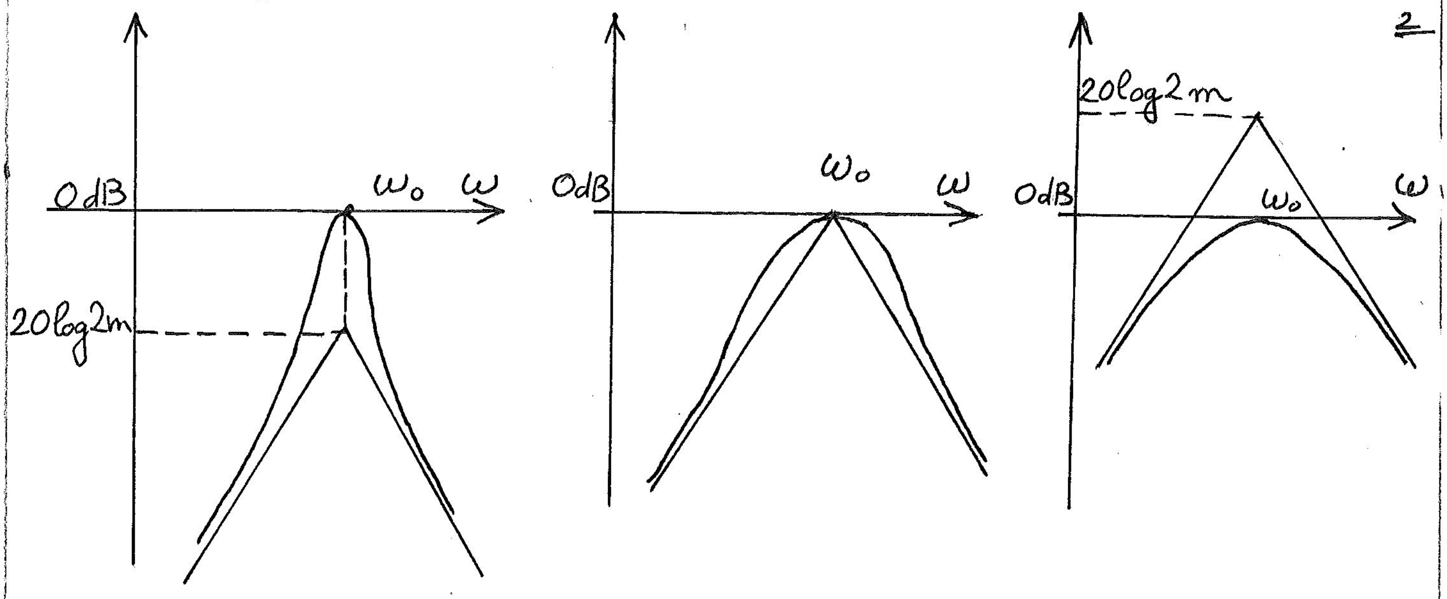
  · $\omega \to 0$: asymptote $Y = 20 \log\left(\dfrac{2m}{\omega_0}\right) + 20 \log \omega$

  $\omega \to \infty$: " $Y = 20 \log(2m\omega_0) - 20 \log \omega$

  Point d'intersection des asymptotes :

  $\omega = \omega_0$ et $Y = 20 \log 2m$

  Suivant la valeur de m $\left(m < \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} \text{ et } m > \frac{1}{2}\right)$, on a donc les 3 configurations suivantes :



$m < \frac{1}{2}$ $\qquad$ $m = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $m > \frac{1}{2}$

$\left(\text{Pour } m = \frac{\sqrt{2}}{2},\ 20 \log 2m = +3\,dB\right)$

Etude du cas $m > 1$

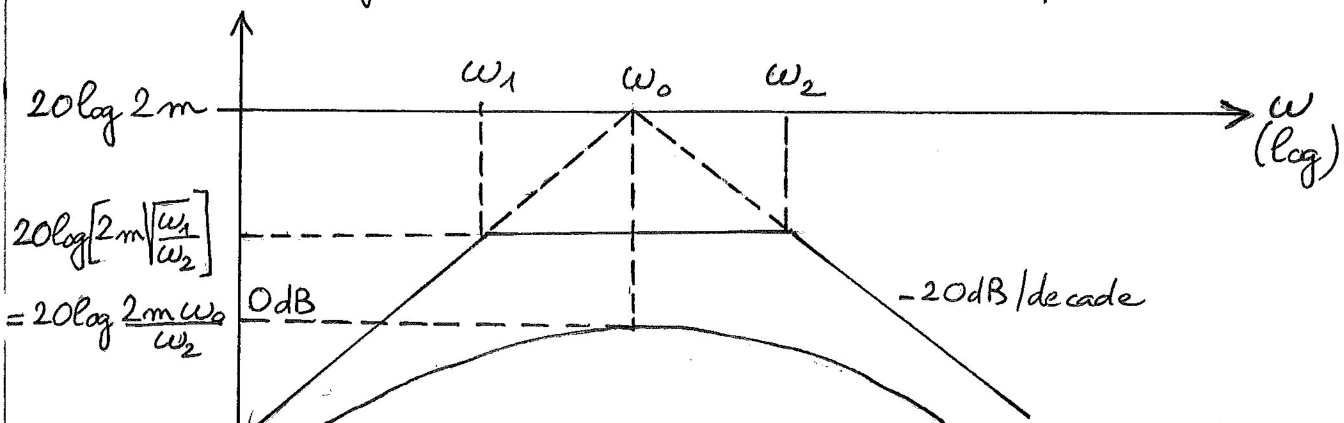
L'équation $p^2 + 2mp\omega_0 + \omega_0^2 = 0$ admet 2 racines réelles négatives :

$$p_1 = -\omega_1 = -\omega_0\left[m - \sqrt{m^2 - 1}\right]$$
$$p_2 = -\omega_2 = -\omega_0\left[m + \sqrt{m^2 - 1}\right]$$
$$\left(\Longrightarrow \begin{cases} \omega_1 \omega_2 = \omega_0^2 \\ \omega_1 + \omega_2 = 2m\omega_0 \end{cases} \right)$$

La fonction de transfert $T'(p)$ peut donc se factoriser sous la forme d'un produit de fonctions de transfert du 1er ordre :

$$T'(p) = \frac{2mp/\omega_0}{\left(1 + \frac{p}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{p}{\omega_2}\right)} \quad ; \quad T'(j\omega) = 2m \frac{j\omega/\omega_0}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

d'où le diagramme de Bode asymptotique :



Les équations des asymptotes obliques sont :

$\omega \to 0$: $Y = 20 \log \frac{2m}{\omega_0} + 20 \log \omega$

$\omega \to \infty$: $Y = 20 \log(2m\omega_0) - 20 \log \omega$ (compte tenu de $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$)

Point d'intersection des asymptotes obliques :

$\omega = \omega_0$; $Y = 20 \log 2m$

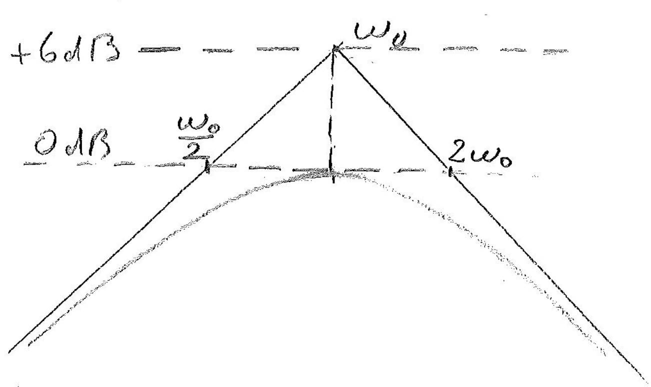
On retrouve donc les asymptotes obliques déterminées dans le cas général (m quelconque) ; compte tenu de l'information supplémentaire $m > 1$, on a pu préciser le diagramme asymptotique par une asymptote horizontale entre ω_1 et ω_2 dont l'ordonnée est $20 \log \frac{2m\omega_0}{\omega_2} = 20 \log\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2}\right) > 0\,dB$

ou encore $20 \log \left[2m \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}\right]$

La courbe réelle, qui passe par $0\,dB$ pour $\omega = \omega_0$, est toujours au dessous de ses asymptotes

Etude du cas $m = 1$

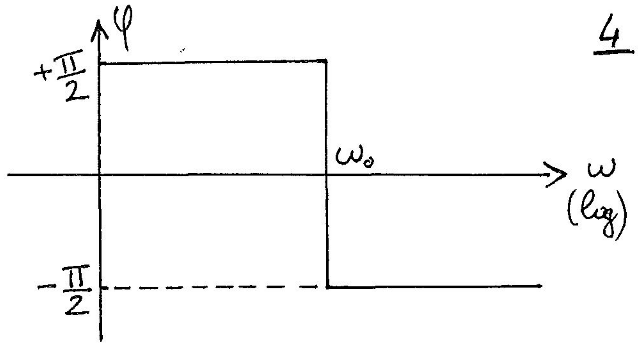
On a $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$; il n'y a pas d'asymptote horizontale, et les asymptotes obliques se coupent pour $\omega = \omega_0$ à l'ordonnée $Y = 20 \log 2 = +6\,dB$



Retour au cas général

Phase

- $\omega \to 0 \Rightarrow \mathrm{Arg}\,\overline{T} \to +\pi/2$
- $\omega = \omega_0 \Rightarrow \mathrm{Arg}\,\overline{T} = 0$
- $\omega \to +\infty \Rightarrow \mathrm{Arg}\,\overline{T} \to -\pi/2$



Bande passante

Rappelons que $Q = \dfrac{1}{2m}$ s'appelle le coefficient de qualité du circuit.

Pour un circuit RLC série, $m = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}} \Rightarrow Q = \dfrac{1}{R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$

Or $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \sqrt{C} = \dfrac{1}{\omega_0\sqrt{L}}$ d'où $\boxed{Q = \dfrac{L\omega_0}{R}}$: coefficient de qualité de la bobine (L, R) à la pulsation ω_0

La fonction de transfert peut s'exprimer en fonction du coefficient de qualité sous la forme :

$$\overline{T} = T_0 \frac{\frac{1}{Q} j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q} j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = T_0 \frac{1}{-Qj\frac{\omega_0}{\omega} + 1 + Qj\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\boxed{\overline{T} = T_0 \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}} \; ; \; T = |\overline{T}| = \frac{T_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Pour $\omega = \omega_0$, on a : $T = T_0$.

Aux pulsations de coupure : $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 2$

soit encore : $Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1 \Rightarrow \omega^2 \pm \omega . \dfrac{\omega_0}{Q} - \omega_0^2 = 0$.

Cette équation admet 2 solutions positives :

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \quad \text{et} \quad \omega_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}$$

On en déduit l'expression de la bande passante à $-3\,dB$:

$$\boxed{B.P = f_1 - f_2 = \frac{f_0}{Q} = 2 m f_0.}$$

La bande passante est d'autant plus étroite que le coefficient de qualité du circuit est grand (et donc que le coefficient d'amortissement est petit). Pour les valeurs élevées de Q (≥ 10) on parle de <u>circuit sélectif</u>.